# 5. Vlastní čísla a vlastní vektory, spektrální rozklad

## Vlastní čísla a vlastní vektory

**Cv. 5.1** Matice $A$ má vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ a jim odpovídající vlastní vektory $x_1, \dots, x_n$. Určete, jak vypadají vlastní čísla a vlastní vektory:

(a) matice $A^2$,

(b) matice $\alpha A$,

(c) matice $A + \alpha I_n$,

(d) matice $A^{-1}$,

(e) matice $A^T$.

**Cv. 5.2** Najděte nejmenší číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, že $A + \beta I_n$ je regulární pro všechny $\beta > \alpha$.

**Cv. 5.3** Známe-li vlastní čísla a vektory matic $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$, jak je spočítat pro matici

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}?$$

## Spektrální rozklad

**Cv. 5.4** Rozložte následující matice na součin $SDS^{-1}$, kde matice $S$ je regulární a matice $D$ je diagonální:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$,

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}^T$,

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \end{pmatrix}$.

**Cv. 5.5** Dokažte přímo Cayleyho-Hamiltonovu větu pro diagonalizovatelné matice.