4. Vlastní čísla a vlastní vektory, diagonalizovatelnost

Vlastní čísla a vlastní vektory

Cv. 4.1 Ověřte platnost věty O Geršgorinových kruzích pro matici

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Věta říká, že pro každé vlastní číslo λ matice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ existuje index $i \in \{1, \ldots, n\}$ tak, že λ náleží kruhu $K(a_{ii}, r_i)$ se středem a_{ii} a poloměrem $r_i = \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$. Vlastní čísla matice A jsou $\lambda_1 = i$ a $\lambda_2 = 2$. První vlastní číslo náleží kruhu $K(a_{11}, r_1) = K(i, 0)$, což je vlastně bod i (degenorovaný kruh se středem v bodě i a poloměrem 0). Druhé vlastní číslo náleží kruhu $K(a_{22}, r_2) = K(2, 1)$.

Cv. 4.2 Buď $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

(a) Ověřte Cayleyho-Hamiltonovu větu,

(b) Vyjádřete A^{-1} jako lineární kombinace I_2 a A.

Řešení:

(a) Věta říká, že pro charakteristický polynom matice $p_A(\lambda)$ platí, že $p_A(A) = 0$. Určíme

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda - 2.$$

Dosadíme A,

$$p_A(A) = A^2 - 5A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Podle Cayleyho-Hamiltonovy věty platí

$$0 = p_A(A) = A^2 - 5A - 2I_2.$$

Rovnici vynásobíme maticí A^{-1} a získáme

$$0 = A - 5I_n - 2A^{-1}.$$

Z této rovnice už snadno vyjádříme A^{-1} jako

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A - 5 \cdot I_2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Podobnost a diagonalizovatelnost matic

Cv. 4.3 Vyšetřete vlastnost *podobnosti* matic jako relace.

Řešení:

Podle definice jsou dvě matice $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ podobné $A \sim B$, pokud existuje regulární $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ taková, že $A = SBS^{-1}$.

Reflexivita. Nejprve vyšetříme, zda je podobnost reflexivní. To by znamenalo, že existuje S taková, že $A = SAS^{-1}$. Okamžitě vidíme, že za S můžeme dosadit $S = I_n$, tedy podobnost je reflexivní relace.

Symetrie. Symetrie říká, že pokud $A = SBS^{-1}$, potom existuje regulární matice T taková, že $B = TAT^{-1}$. Přenásobením první rovnosti maticí S^{-1} zleva a maticí S zprava dostáváme výraz $S^{-1}AS = B$, tedy můžeme volit $T = S^{-1}$. Podobnost je symetrická relace.

Tranzitivita. Tranzitivita říká, že pokud $A \sim B$ a $B \sim C$, potom $A \sim C$. Jinými slovy, pokud existují regulární matice S, T takové, že $A = SBS^{-1}$ a $B = TCT^{-1}$, poté existuje regulární matice U taková, že $A = UCU^{-1}$. Dosazením druhé rovnice do první dostáváme

$$A = SBS^{-1} = S(TCT^{-1})S^{-1} = (ST)C(T^{-1}S^{-1}) = (ST)C(ST)^{-1}.$$

Vidíme, že za matici U můžeme volit $U = ST$. Tato matice bude regulární, protože součin dvou regulárních matic je opět regulární matice.

Relace podobnosti matic je tedy reflexivní, symetrická a tranzitivní, je to tudíž relace ekvivalence.

Cv. 4.4 Rozhodněte o platnosti $A \sim B \;\Rightarrow\; A^2 \sim B^2$. Jak to bude s opačnou implikací?

Řešení:

Pokud $A \sim B$, potom existuje regulární matice S taková, že $A = SBS^{-1}$. Chceme rozhodnout, zda poté existuje regulární matice T taková, že $A^2 = TB^2T^{-1}$. Pomocí prvního vztahu můžeme matici A^2 vyjádřit jako

$$A^2 = (SBS^{-1})(SBS^{-1}) = SB(S^{-1}S)BS^{-1} = SBBS^{-1} = SB^2S^{-1}.$$

Vidíme tedy, že můžeme volit matici $T = S$, a tudíž implikace platí.

Opačná implikace obecně platit nebude. Ke konstrukci protipříkladu můžeme využít například vztahu, že podobné matice mají stejná vlastní čísla. Zvolme $A = I_n$ a $B = -I_n$. Diagonální matice mají vlastní čísla na diagonále, proto vlastní číslo matice A je 1 s algebraickou násobností n a vlastní číslo matice B je -1 s algebraickou násobností n. Matice A a B tedy nejsou podobné. Nicméně, $A^2 = I_n$ a $B^2 = (-I_n)(-I_n) = I_n$. Platí dokonce $A^2 = B^2$ a z reflexivity podobnosti tedy vyplývá, že $A^2 \sim B^2$.

Cv. 4.5 Určete, zda jsou následující matice diagonalizovatelné:

(a) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -5 & 1 \end{pmatrix},$

(b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

(c) $C = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

(d) $D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Řešení:

K určení diagonalizovatelnosti matice musíme rozhodnout, zda matice má n lineárně nezávislých vlastních vektorů. Spočítáme tedy vlastní čísla matice a určíme, kolik jim přísluší vlastních vektorů. Jinými slovy, rozhodneme, zda algebraická a geometrická násobnost každého vlastního čísla je stejná. Vlastní vektory počítat nemusíme, to k rozhodnutí ohledně diagonalizovatelnosti není potřeba (je to potřeba k sestrojení spektrálního rozkladu, což zde nepožadujeme).

(a) Spočtěme tedy vlastní čísla matice A jakožto kořeny jejího charakteristického polynomu. Charakteristický polynom matice A je

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 14\lambda + 8 = \\ = (4-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda).$$

Vlastní čísla jsou tedy $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 2$ a $\lambda_3 = 1$. Protože jsou navzájem různá, je matice nutně diagonalizovatelná.

(b) Postupujeme stejně jako u matice A, jen zde vyjdou komplexní vlastní čísla. Charakteristický polynom matice B se rovná $p_B(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$. Kořeny polynomu $p_B(\lambda)$ jsou $1 + i$ a $1 - i$. Opět jsou vlastní čísla navzájem různá, matice je tedy diagonalizovatelná.

(c) Charakteristický polynom matice C je $p_C(\lambda) = (5 - \lambda)^2$. Matice C má tedy vlastní číslo 5 s algebraickou násobností 2. Geometrická násobnost vlastního čísla je rovna číslu

$$\operatorname{rank}(C - \lambda I_2) = \operatorname{rank}(C - 5 \cdot I_2) = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1.$$

Proto k vlastnímu číslu 0 existuje pouze jediný vlastní vektor, a matice C tudíž není diagonalizovatelná.

(d) Matice D je horní trojúhelníková, její vlastní čísla jsou tedy prvky na diagonále. Konkrétně, je to jednonásobné vlastní číslo $\lambda_1 = 2$ a dvojnásobné vlastní číslo $\lambda_2 = 7$. K prvnímu vlastnímu číslu existuje pouze jeden vlastní vektor, ale jak to bude s druhým vlastním číslem? Hodnost matice

$$D - \lambda_1 I_3 = D - 7 \cdot I_3 = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je jedna, což znamená, že k λ_2 náleží dva vlastní vektory. Dohromady tak máme plný počet vlastních vektorů, a proto je matice D diagonalizovatelná.