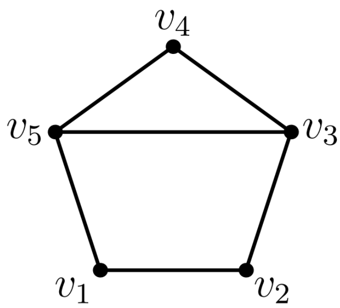
3. Počet koster grafu, vlastní čísla a vlastní vektory

Počet koster grafu

Cv. 3.1 Pomocí Laplaceovy matice vypočtěte počet koster neorientovaného grafu G znázorněného na obrázku 1.



Obrázek 1: Graf

Vlastní čísla a vlastní vektory – základy

Cv. 3.2 Vlastní vektor matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ reprezentuje směr, který se při lineárním zobrazení $f(x) = Ax$ zobrazí opět na ten samý směr (mění se tedy pouze velikost nebo orientace vektoru). Pro vlastní vektor v matice A tedy platí, že přímka $\operatorname{span}\{v\}$ se při zobrazení f zobrazí do sebe sama. Příslušné vlastní číslo matice pak představuje škálování v tomto invariantním směru.

Následující matice reprezentují geometrická zobrazení v rovině. Nalezněte jejich vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory a pokuste se je geometricky vysvětlit:

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

(b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

(c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

(d) $D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Cv. 3.3 Určete charakteristický polynom a nalezněte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory následujících matic nad tělesem $\mathbb{C}$. Jsou vlastní vektory jednoznačné?

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$,

(b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$,

(c) $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$

Cv. 3.4 Určete charakteristický polynom a nalezněte vlastní čísla matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Cv. 3.5 Známe tři vlastní čísla matice

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 7 & -7 \\ 4 & 5 & 2 & -2 \\ 16 & 4 & 15 & -8 \\ 30 & 4 & 26 & -19 \end{pmatrix},$$

a to $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -4$ a $\lambda_3 = 5$. Dopočítejte zbylé vlastní číslo.