

1. Determinanty – výpočet

Cv. 1.1 Spočítejte determinanty následujících reálných matic. Použijte výpočet z definice, pomocí Gaussovy eliminace a pomocí Laplaceova rozvoje podle nějakého řádku.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Cv. 1.2 Spočítejte determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 4 & 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cv. 1.3 Spočítejte determinant následujících matic:

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ -1 & 0 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 & \dots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & 1-n & 0 \end{pmatrix},$$

$$(b) \quad B = \begin{pmatrix} a_1 + x & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 + x & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 + x & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n + x \end{pmatrix}.$$

Cv. 1.4 Buď $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Rozhodněte, zda následující vztahy pro blokové matice platí či ne:

$$(a) \quad \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A) \det(B),$$

$$(b) \quad \det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A) \det(B).$$

Cv. 1.5 Rozhodněte, zda platí $\det(AB) = \det(BA)$.

Cv. 1.6 Zjednodušte výraz $\det(SAS^{-1})$ pro matice $A, S \in \mathbb{T}^{n \times n}$.

Cv. 1.7 Spočítejte determinanty matic nad příslušnými tělesy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ nad } \mathbb{Z}_5, \quad B = \begin{pmatrix} i-1 & 1 & 0 \\ 1 & i & i \\ 2 & 1 & i+1 \end{pmatrix} \text{ nad } \mathbb{C}.$$

Cv. 1.8 Pro jaké a je matice regulární? Řešte nad \mathbb{R}, \mathbb{Z}_3 .

$$\begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ a-1 & 1 & 1 \\ a+1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cv. 1.9 Buď $A, B, C, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Rozhodněte, zda platí:

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A) \det(D) - \det(B) \det(C).$$