11. Lineární zobrazení, matice vzhledem ke kanonické bázi

Definice lineárního zobrazení

Dcv. 11.1 Rozhodněte, zda následující zobrazení z prostoru $\mathbb{R}^{n\times n}$ jsou lineární:

(a) $f(A) = A^2$,

(b) $f(A) = a_{11}$.

Řešení:

(a) Zobrazení $f(A) = A^2$ není lineární. Například pro $A = I_n$ a $\alpha = 3$ máme

$$f(\alpha A) = 9I_n \neq 3I_n = \alpha f(A).$$

(b) Zobrazení $f(A) = a_{11}$ je lineární. Podmínky z definice se snadno ověří.

Matice lineárního zobrazení vzhledem ke kanonické bázi

Dcv. 11.2 Najděte matici následujících lineárních zobrazení v rovině $\mathbb{R}^2$ vzhledem ke kanonické bázi:

(a) Otočení o 90° proti směru hodinových ručiček.

(b) Projekce na osu x.

(c) Otočení o 90° proti směru hodinových ručiček a pak projekce na osu x.

(d) Projekce na osu x a pak otočení o 90° proti směru hodinových ručiček.

Řešení:

Stačí zobrazit jednotkové vektory $e_1 = (1, 0)^T$, $e_2 = (0, 1)^T$ a jejich obrazy tvoří sloupce hledané matice.

(a) Vektor $(1, 0)^T$ se otočí na $(0, 1)^T$ a vektor $(0, 1)^T$ se otočí na $(-1, 0)^T$. Matice zobrazení tedy je

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Vektor $(1, 0)^T$ se projektuje na $(1, 0)^T$ a vektor $(0, 1)^T$ se projektuje na $(0, 0)^T$. Matice zobrazení tedy je

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Vektor $(1, 0)^T$ se otočí na $(0, 1)^T$, který se pak projektuje na $(0, 0)^T$. Vektor $(0, 1)^T$ se otočí na $(-1, 0)^T$ a následně projektuje na $(-1, 0)^T$. Matice zobrazení tedy je

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alternativně dostaneme matici zobrazení složením předchozích dvou zobrazení. Matice je pak rovna součinu příslušných dvou matic, tedy

$$C = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Vektor $(1,0)^T$ se projektuje na $(1,0)^T$, který se pak otočí na $(0,1)^T$. Vektor $(0,1)^T$ se projektuje na $(0,0)^T$ a následně otočí na $(0,0)^T$. Matice zobrazení tedy je

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alternativně dostaneme matici zobrazení složením předchozích dvou zobrazení. Matice je pak rovna součinu příslušných dvou matic, tedy

$$D = AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tento příklad opět ilustruje, že skládání zobrazení není komutativní operace, stejně jako a součin matic.