10. Dimenze, maticové prostory

Báze a dimenze

Dcv. 10.1 Najděte bázi a určete dimenzi následujících vektorových prostorů:

(a) $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$,

(b) $\mathbb{C}^2$ nad $\mathbb{C}$,

(c) $\mathbb{C}^2$ nad $\mathbb{R}$,

(d) $\mathcal{P}^2$.

Řešení:

(a) Bázi tvoří například e_1, e_2 či jakékoli dva lineárně nezávislé vektory. Dimenze je tudíž 2.

(b) Bázi tvoří například e_1, e_2 či jakékoli dva lineárně nezávislé vektory. Dimenze je tudíž 2.

Tato vlastnost platí obecně. Je-li $\mathbb{T}$ těleso, pak vektorový prostor $\mathbb{T}^2$ nad $\mathbb{T}$ má dimenzi 2 a jeho bází je například kanonická báze e_1, e_2. Důkaz: vektory e_1, e_2 jsou zřejmě lineárně nezávislé a každý vektor $v = (v_1, v_2)^T \in \mathbb{T}$ lze napsat $v = v_1(1,0)^T + v_2(0,1)^T = v_1e_1 + v_2e_2$.

(c) Bázi tvoří například $e_1, e_2, (i,0)^T, (0,i)^T$. Dimenze je tudíž 4.

Důkaz. Nejprve ukážeme, že to jsou generátory. Každý vektor $v \in \mathbb{C}^2$ je tvaru $v = (a_1 + b_1 i, a_2 + b_2 i)^T$, kde $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Můžeme tento vektor tedy vyjádřit

$$v = a_1(1,0)^T + b_1(i,0)^T + a_2(0,1)^T + b_2(0,i)^T.$$

Lineární nezávislost. Uvažujme lineární kombinaci vektorů (s reálnými koeficienty!)

$$a_1(1,0)^T + b_1(i,0)^T + a_2(0,1)^T + b_2(0,i)^T = (0,0)^T, \quad a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}.$$

Rovnice lze ekvivalentně psát $(a_1 + b_1 i, a_2 + b_2 i)^T = (0,0)^T$ a je splněna právě tehdy, když $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 0$.

(d) Bázi tvoří například $1, x, x^2$. Dimenze je tudíž 3.

Dcv. 10.2 Najděte všechny podprostory vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$.

Řešení:
Budeme postupovat výčtem možných hodnot pro dimenzi podprostoru. Dimenzi 0 má pouze podprostor $\{o\}$, dimenzi 1 mají přímky procházející počátkem (těch je nekonečně mnoho), a dimenzi 2 má jen celý prostor $\mathbb{R}^2$.

Dcv. 10.3 Určete počet podprostorů $\mathbb{Z}_p^2$ nad $\mathbb{Z}_p$.

Řešení:

Opět rozdělíme podprostory podle jejich dimenze. Dimenzi 0 má pouze podprostor $\{o\}$. Dimenzi 2 má jen celý prostor $\mathbb{Z}_p^2$. Dimenzi 1 mají přímky procházející počátkem. Přímka má normovaný směr buď $(0,1)$ nebo $(1,a)$, $a \in \mathbb{Z}_p$. Celkem dostáváme, že počet podprostorů je $p+3$.

Dcv. 10.4 Nechť U, V jsou podprostory vektorového prstoru W. Dokažte, že pokud $U \cap V = \{o\}$, pak každý vektor $w \in U+V$ lze zapsat jediným způsobem ve tvaru $w = u+v$, kde $u \in U$ a $v \in V$.

Řešení:
Budeme postupovat sporem. Předpokládejme pro spor, že existují dvě různá vyjádření součtu $w = u + v = u' + v'$, kde $u, u' \in U$ a $v, v' \in V$. Pak ale vektor $z := u - u' = v - v'$ je nenulový a nachází se v průniku $U \cap V$, což je spor s předpokladem.

Maticové prostory

Dcv. 10.5 Buď

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Nad tělesem $\mathbb{Z}_7$ rozhodněte, zda platí:

(a) $v \in \mathrm{Ker}(A)$,

(b) $v \in \mathcal{S}(A)$.

Řešení:
Z definice jádra a sloupcového prostoru matice platí

$$\mathrm{Ker}(A) = \{x \in \mathbb{T}^n;\ Ax = 0\},$$
$$\mathcal{S}(A) = \mathrm{span}\{A_{*1}, \dots, A_{*n}\} = \{Ax;\ x \in \mathbb{T}^n\},$$

stačí tedy ověřit, zda vektor $v = (1,2)^T$ řeší soustavu $Ax = 0$ nad daným tělesem a zda platí $Ax = v$ pro nějaké $x \in \mathbb{T}^2$.

Nad tělesem $\mathbb{Z}_7$:

(a) vektor v nepatří $\mathrm{Ker}(A)$, protože

$$Av = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

(b) vektor v patří do $\mathcal{S}(A)$, protože soustava

$$(A \mid v) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

má nad tělesem $\mathbb{Z}_7$ řešení a platí $(1,2)^T = 2(1,3)^T + 3(2,1)^T$.

Dcv. 10.6 Najděte matici A takovou, že

(a) $\mathcal{R}(A)$ obsahuje vektory $(1,1)^T, (1,2)^T$ a $\mathcal{S}(A)$ obsahuje $(1,0,0)^T$, $(0,0,1)^T$,

(b) bázi $\mathcal{R}(A)$ i $\mathcal{S}(A)$ tvoří vektor $(1,1,1)^T$ a báze $\mathrm{Ker}(A)$ je $(1,-2,1)^T$.

Řešení:

(a) Tento příklad je zaměřený na kreativitu a ne na postup podle šablony. Proto popíšeme jen základní myšlenky, které pomohou hledanou matice najít. Ze zadaných vektorů v řádkovém a sloupcovém prostoru vidíme, že hledáme matici 3×2. Dále, z podmínek na řádkový prostor dostáváme $\mathcal{R}(A) = \mathbb{R}^2$, neboli stačí, aby matice A měla lineárně nezávislé sloupce. Pokud dáme vektory z podmínky na $\mathcal{S}(A)$ přímo do sloupců matice A, získáme požadovanou matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hledaná matice ale není zdaleka jednoznačná. Požadovanou vlastnost splňují další matice, jako například

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) V tomto případě hledáme matici 3×3, pro kterou platí

$$\dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{S}(A) = \mathrm{rank}(A) = 1, \quad \dim \mathrm{Ker}(A) = 1.$$

Z věty o dimenzi jádra a hodnosti matice ale víme, že pro každou matici $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ musí platit vztah

$$\dim \mathrm{Ker}(A) + \mathrm{rank}(A) = n.$$

V našem případě dostáváme $1 + 1 = \dim \mathrm{Ker}(A) + \mathrm{rank}(A) = 3$. Matice splňující požadované vlastnosti tedy neexistuje.

Dcv. 10.7 Rozhodněte, zda pro matice $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ platí

(a) $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(B)$ implikuje $\mathrm{RREF}(A) = \mathrm{RREF}(B)$,

(b) $\mathrm{RREF}(A) = \mathrm{RREF}(B)$ implikuje $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(B)$.

Řešení:

(a) Tvrzení neplatí. Například matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mají stejný sloupcový prostor

$$\mathrm{span}\{(1,0)^T, (0,0)^T\} = \mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(B) = \mathrm{span}\{(0,0)^T, (1,0)^T\},$$

ale jejich redukované odstupňované tvary jsou různé (obě matice jsou v RREF).

(b) Neplatí ani tato opačná implikace. Například pro matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

máme $\mathrm{RREF}(A) = \mathrm{RREF}(B) = A$, ale přitom

$$\operatorname{span}\left\{(1,0)^T, (0,0)^T\right\} = \mathcal{S}(A) \neq \mathcal{S}(B) = \operatorname{span}\left\{(0,1)^T, (0,0)^T\right\}.$$

Dcv. 10.8 S využitím maticových prostorů určete dimenzi prostoru

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n;\ x_1 + \ldots + x_n = 0\}.$$

Řešení:

Prostor V odpovídá množině řešení soustavy

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{array}\right),$$

to znamená jádru matice $A = \begin{pmatrix} 1 \; 1 \; \cdots \; 1 \end{pmatrix}$ Tato matice má rozměr $1 \times n$ a má hodnost 1. Pro dimenzi jádra použijeme vzoreček (věta o dimenzi jádra a hodnosti matice):

$$\dim V = \dim \mathrm{Ker}(A) = n - \mathrm{rank}(A) = n - 1.$$

Závěr: Hledaná dimenze je tedy $n + 1$.

Kdybychom chtěli najít i bázi, tak jednoduše vyřešíme soustavu $Ax = 0$ pomocí Gaussovy eliminace. Bázi tak tvoří například vektory $(1, -1, 0 \ldots, 0)^T$, $(0, 1, -1, 0 \ldots, 0)^T$, $\ldots$, $(0 \ldots, 0, 1, -1)^T$.

Dcv. 10.9 Rozhodněte, zda platí $\mathrm{rank}(A + B) \leq \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$ pro $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

(*Hint:* Jaký je vztah mezi prostory $\mathcal{S}(A + B)$ a $\mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B)$?)

Řešení:

Uvažujme prostor generovaný sjednocením sloupců matice A a sloupců matice B, tedy spojení $\mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B)$. Dimenze tohoto prostoru je

$$\dim(\mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B)) \leq \dim \mathcal{S}(A) + \dim \mathcal{S}(B) = \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B).$$

Dále, prostor $\mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B)$ obsahuje všechny vektory generované sloupci matice $A + B$, tedy $\mathcal{S}(A + B)$ je podprostorem $\mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B)$. Platí proto

$$\mathrm{rank}(A + B) = \dim \mathcal{S}(A + B) \leq \dim(\mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B)) \leq \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B).$$