9. Lineární nezávislost, báze vektorového prostoru

Lineární závislost a nezávislost

Dcv. 9.1 Diskutujte, kdy je systém jednoho resp. dvou resp. tří vektorů lineárně závislý.

Řešení:
1 vektor: Aby množina s jedním vektorem byla lineárně závislá, tak ten vektor musí být nulový.

2 vektory: Aby množina dvou vektorů byla lineárně závislá, jeden vektor musí být násobek druhého.

3 vektory: V tomto případě jeden vektor je lineární kombinací ostatních, ale nemusí být nutně jeden vektor násobek nějakého jiného.

Dcv. 9.2 Rozhodněte, zda vektory $(0,1,1,1)^T$, $(1,0,1,1)^T$, $(1,1,0,1)^T$, $(1,1,1,0)^T$ jsou lineárně závislé v $\mathbb{R}^4$ resp. v $\mathbb{Z}_3^4$.

Řešení:
Zjistíme, že nad $\mathbb{R}$ jsou vektory lineárně nezávislé. Nad $\mathbb{Z}_3$ jsou ale lineárně závislé, například

$$1 \cdot (0,1,1,1)^T + 1 \cdot (1,0,1,1)^T + 1 \cdot (1,1,0,1)^T + 1 \cdot (1,1,1,0)^T = o.$$

Vidíme tedy, že lineární závislost/nezávislost závisí na volbě tělesa vektorového prostoru.

Dcv. 9.3 Buďte U, V podprostory prostoru W. Dokažte, že $U \cap V = \{o\}$ právě tehdy, když každý vektor $x \in U + V$ se dá jednoznačně zapsat jako $x = u + v$, kde $u \in U$, $v \in V$.

Řešení:
Ekvivalenci dokážeme tak, že ukážeme zvlášť obě implikace.

„$\Rightarrow$“ Z definice spojení prostorů se každý vektor $x \in U + V$ dá zapsat jako $x = u + v$, kde $u \in U$, $v \in V$. Musíme tedy ukázat jednoznačnost tohoto vyjádření. Pro spor mějme dvě vyjádření vektoru x,

$$u_1 + v_1 = x = u_2 + v_2$$

pro $u_1, u_2 \in U$ a $v_1, v_2 \in V$. Rovnost upravíme na

$$u_1 - u_2 = v_2 - v_1.$$

Vektor $u_1 - u_2$ leží v U a vektor $v_2 - v_1$ leží ve V. Z předpokladu je $U \cap V = \{0\}$, čili $u_1 - u_2 = v_2 - v_1 = 0$. Z toho ale vyplývá, že $u_1 = u_2$ a $v_1 = v_2$ a vyjádření x je tedy jednoznačné. Spor.

„$\Leftarrow$“ Opět postupujeme sporem. Předpokládejme, že existuje nenulový vektor $w \in U \cap V$. Pak tento vektor můžeme vyjádřit dvěma různými způsoby (první sčítanec je z U, druhý sčítanec je z V):

$$w = w + o = o + w.$$

Dcv. 9.4 Určete, zda následující množiny vektorů jsou lineárně nezávislé v prostoru reálných funkcí $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (nad tělesem $\mathbb{R}$).

(a) $\{x^2 + 2x + 3,\ x + 1,\ x - 1\}$.

(b) $\{\sin x,\ \cos x\}$.

Řešení:

(a) Opět hledáme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\alpha_1 \cdot (x^2 + 2x + 3) + \alpha_2 \cdot (x + 1) + \alpha_3 \cdot (x - 1) = 0,$$

neboli

$$\alpha_1 \cdot x^2 + (2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \cdot x + (3\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) = 0.$$

Aby byl polynom nulový pro všechna $x \in \mathbb{R}$, musí být všechny koeficienty polynomu nulové. Z toho dostaneme homogenní soustavu

$$\left(\begin{array}{ccr|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Tato soustava má jediné řešení $(0, 0, 0)^T$, polynomy jsou tedy lineárně nezávislé.

(b) Hledáme řešení rovnice

$$\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \cos x = 0,$$

čili taková $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, aby rovnice byla splněna pro každé $x \in \mathbb{R}$. Protože nemůžeme sestavit soustavu rovnic podobně jako v předchozích podúlohách, snažíme se nalézt takové $x \in \mathbb{R}$, pro které vynutíme z rovnosti konkrétní hodnoty α_1, α_2. Pokud dosadíme $x = 0$, dostaneme $\alpha_2 = 0$, protože $\sin 0 = 0$ a $\cos 0 = 1$. Pokud dosadíme $x = \frac{\pi}{2}$, pak nutně $\alpha_1 = 0$, protože $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ a $\cos \frac{\pi}{2} = 0$. Aby byla rovnice splněna, nutně musí $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Zároveň vidíme, že $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ splňují tuto rovnici. Funkce jsou tedy lineárně nezávislé.

Báze a souřadnice

Dcv. 9.5 Souřadnice vektoru v vzhledem k bázi $B = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ jsou $[v]_B = (a_1, a_2, a_3, a_4)^T$. Určete souřadnice vektoru v vzhledem k bázi B', pokud

(a) $B' = \{z_4, z_3, z_2, z_1\}$,

(b) $B' = \{z_1 + z_4, z_2, z_3, z_4\}$,

(c) $B' = \{z_1 + z_4, z_2 + z_3, z_4, z_2\}$.

Řešení:

Souřadnice vektoru v vzhledem k bázi B' můžeme určit standardním způsobem, ale vzhledem k tomu, jak báze B' vypadá, tak souřadnice odvodíme přímo. K tomu nám pomůže fakt, že ze zadání víme $v = a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3 + a_4 z_4 = \sum_{i=1}^{4} a_i z_i$.

(a) Protože můžeme psát $v = a_4z_4 + a_3z_3 + a_2z_2 + a_1z_1$, tak hledané souřadnice jsou$[v]_{B'} = (a_4, a_3, a_2, a_1)^T$.

(b) Chceme vyjádřit vektor jako

$$v = \,?\,(z_1 + z_4)+ \,?\, z_2+ \,?\, z_3+ \,?\, z_4,$$

přičemž víme

$$v = a_1z_1 + a_2z_2 + a_3z_3 + a_4z_4.$$

Zde se nabízí vhodně přičíst a odečíst hodnotu a_1z_4 a vyjádřit vektor jako

$$v = a_1(z_1 + z_4) + a_2z_2 + a_3z_3 + (a_4 - a_1)z_4,$$

z čehož $[v]_{B'} = (a_1, a_2, a_3, a_4 - a_1)^T$.

(c) Analogickou úvahou vyjádříme vektor jako

$$\begin{aligned} v &= a_1(z_1 + z_4) + a_2z_2 + a_3z_3 + (a_4 - a_1)z_4 \\ &= a_1(z_1 + z_4) + a_3z_3 + (a_4 - a_1)z_4 + a_2z_2 \\ &= a_1(z_1 + z_4) + a_3(z_2 + z_3) + (a_4 - a_1)z_4 + (a_2 - a_3)z_2, \end{aligned}$$

z čehož $[v]_{B'} = (a_1, a_3, a_4 - a_1, a_2 - a_3)^T$.