8. Vektorové prostory a lineární obal

Vektorové prostory a podprostory

Dcv. 8.1 Najděte netriviální podmnožinu $\mathbb{R}^2$, která je:

(a) uzavřená na sčítání a odčítání, ale ne na násobky,

(b) uzavřená na násobky, ale ne na sčítání.

Dcv. 8.2 Rozhodněte, zda následující množiny vektorů tvoří podprostor $\mathbb{R}^2$:

(a) $\{(s, s^2)^T;\ s \in \mathbb{R}\}$,

(b) $\{(s - t, 2t)^T;\ s, t \in \mathbb{R}\}$.

Dcv. 8.3 Buď $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Dokažte, že $\{x \in \mathbb{R}^n;\ Ax = 0\}$ tvoří vektorový podprostor $\mathbb{R}^n$.

Dcv. 8.4 Nalezněte vlastní příklady podprostorů prostoru matic $\mathbb{R}^{n\times n}$ nad $\mathbb{R}$.

Dcv. 8.5 Rozhodněte, zda následující tvoří podprostor prostoru reálných posloupností $\mathbb{R}^\infty = \{(x_1, x_2, \dots);\ x_i \in \mathbb{R},\ i \in \mathbb{N}\}$:

(a) posloupnosti s konečně mnoha nenulami,

(b) monotónní posloupnosti (neklesající a nerostoucí posloupnosti čísel),

(c) fibonacciovské posloupnosti (splňující $x_{i+1} = x_i + x_{i-1}$, kde $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ jsou libovolné).

Lineární obal a lineární kombinace

Dcv. 8.6 Buď V vektorový prostor a $M, N \subseteq V$ množiny vektorů. Rozhodněte, zda platí $\mathrm{span}(M \cap N) = \mathrm{span}(M) \cap \mathrm{span}(N)$.

Dcv. 8.7 Rozhodněte, zda existuje lineární kombinace zadaných vektorů dávající vektor $x = (1, 2, 3)^T$ a pokud ano, tak ji najděte: $(1, 1, 1)^T, (2, 1, 3)^T, (3, 1, 5)^T$.