8. Vektorové prostory a lineární obal

Vektorové prostory a podprostory

Dcv. 8.1 Najděte netriviální podmnožinu $\mathbb{R}^2$, která je:

(a) uzavřená na sčítání a odčítání, ale ne na násobky,
(b) uzavřená na násobky, ale ne na sčítání.

Řešení:

(a) Např. množina $\{(i,i)^T \mid i \in \mathbb{Z}\}$.
(b) Např. sjednocení dvojice různoběžných přímek procházejících počátkem.

Dcv. 8.2 Rozhodněte, zda následující množiny vektorů tvoří podprostor $\mathbb{R}^2$:

(a) $\{(s, s^2)^T;\ s \in \mathbb{R}\}$,
(b) $\{(s-t, 2t)^T;\ s,t \in \mathbb{R}\}$.

Řešení:

(a) Není podprostorem, neboť množina není uzavřena ani na násobky, ani na součty. Například vektor $(1,1)^T$ leží v množině, ale její násobek $(2,2)^T$ už nikoli.
(b) Nulový vektor v množina pro $t = 0$, $s = 0$ leží. Uzavřenost na součty a součiny také platí:
   - $(a-b, 2b)^T + (c-d, 2d)^T = ((a+c)-(b+d), 2(b+d))^T$,
   - $\alpha(t-s, 2s)^T = (\alpha t - \alpha s, 2\alpha s)^T$.

Dcv. 8.3 Buď $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Dokažte, že $\{x \in \mathbb{R}^n;\ Ax = 0\}$ tvoří vektorový podprostor $\mathbb{R}^n$.

Řešení:
Aby množina tvořila podprostor, musí obsahovat nulový vektor a být uzavřená na operace sčítání a násobení skalárem.

Pokud dosadíme do soustavy rovnic vektor $x = (0,\dots,0)^T$, dostáváme na levé straně soustavy nuly, tedy nulový vektor je řešením libovolné soustavy rovnic s nulovou pravou stranou.

Uzavřenost na násobky. Pokud $x \in \mathbb{R}^n$ splňuje $Ax = 0$, po dosazení αx, kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je libovolné, dostáváme

$$A(\alpha x) = \alpha(Ax) = \alpha 0 = 0.$$

Obdobně pro součty. Pro libovolné $x, y \in \mathbb{R}^n$ splňující soustavu rovnic platí $Ax = Ay = 0$. Tudíž

$$A(x+y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0.$$

Dcv. 8.4 Nalezněte vlastní příklady podprostorů prostoru matic $\mathbb{R}^{n\times n}$ nad $\mathbb{R}$.

Řešení:

- Triviální příklady jsou celý prostor $\mathbb{R}^{n\times n}$ nad $\mathbb{R}$, nebo množina $\{0_{n\times n}\}$.
- Netriviálním příkladem jsou poté horní (nebo dolní) trojúhelníkové matice, neboť násobení skalárem, ani součet dvou matic nezmění nulovost prvků pod diagonálou.
- Z podobného důvodu tvoří podprostor diagonální matice.
- Obecněji bychom mohli vzít libovolnou podmnožinu matic, kde určité členy zafixujeme rovny 0 a zbytek členů bude nabývat libovolných hodnot.
- Jiným příkladem jsou magické čtverce (tj. matice u nichž součet libovolného řádku, sloupce i obou diagonál dá stejné číslo).

Dcv. 8.5 Rozhodněte, zda následující tvoří podprostor prostoru reálných posloupností $\mathbb{R}^\infty = \{(x_1, x_2, \dots);\ x_i \in \mathbb{R},\ i \in \mathbb{N}\}$:

(a) posloupnosti s konečně mnoha nenulami,
(b) monotónní posloupnosti (neklesající a nerostoucí posloupnosti čísel),
(c) fibonacciovské posloupnosti (splňující $x_{i+1} = x_i + x_{i-1}$, kde $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ jsou libovolné).

Řešení:

(a) Ano, snadno nahlédneme.
(b) Ne, nejsou uzavřené na součty.
Například $(1, 0, 0, 0, \dots) + (0, 0, 1, 1, \dots) = (1, 0, 1, \dots)$.
(c) Ano, snadno nahlédneme.

Lineární obal a lineární kombinace

Dcv. 8.6 Buď V vektorový prostor a $M, N \subseteq V$ množiny vektorů. Rozhodněte, zda platí $\operatorname{span}(M \cap N) = \operatorname{span}(M) \cap \operatorname{span}(N)$.

Řešení:
Vztah obecně neplatí. Například pro $M = \{(1,0)^T, (0,1)^T\}$ a $N = \{(1,1)^T\}$. Zatímco $\operatorname{span}(M\cap N) = \{o\}$, tak $\operatorname{span}(M) \cap \operatorname{span}(N) = \operatorname{span}(N) = \{(c,c)^T;\ c \in \mathbb{R}\}$.

Dcv. 8.7 Rozhodněte, zda existuje lineární kombinace zadaných vektorů dávající vektor $x = (1,2,3)^T$ a pokud ano, tak ji najděte: $(1,1,1)^T, (2,1,3)^T, (3,1,5)^T$.

Řešení:
K řešení využijeme postupu z předchozí úlohy, tedy převedení problému hledání koeficientů lineární kombinace na řešení soustavy lineárních rovnic. Dostáváme soustavu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \end{array}\right),$$

která nemá řešení, protože ji můžeme převést Gaussovou eliminací například na tvar

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Hledaná lineární kombinace tudíž neexistuje.