5. Regulární a inverzní matice, grupy

Dcv. 5.1 Dokažte, že následující matice jsou singulární, a to tak, že najdete nenulové řešení soustavy $Ax = 0$:

(a) matice A má nulový i-tý sloupec tj. $A_{*i} = 0$;
(b) matice A má i-tý a j-tý sloupec shodný, tj. $A_{*i} = A_{*j}$ pro $i \neq j$.

Řešení:

(a) $x = e_i$;
(b) $x = e_i - e_j$.

Upravte následující výrazy.

(a) $(ABC)^{-1}$
(b) $(I - B^T A^{-1})A + (A^T B)^T A^{-1}$

Řešení:

(a) Stačí iterativně aplikovat pravidlo $(PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$. Tedy:
$$(ABC)^{-1} = (A(BC))^{-1} = (BC)^{-1}A^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}.$$
(b) S využitím základních vlastností maticového součinu, transpozice a inverze odvodíme
$$\begin{aligned}
&(I - B^T A^{-1})A + (A^T B)^T A^{-1} \\
&\qquad = IA - B^T A^{-1} A + (A^T B)^T A^{-1} \quad \text{[distributivita]} \\
&\qquad = IA - B^T I + (A^T B)^T A^{-1} \quad \text{[definice inverze]} \\
&\qquad = A - B^T + (A^T B)^T A^{-1} \quad \text{[násobení maticí } I\text{]} \\
&\qquad = A - B^T + B^T A A^{-1} \quad \text{[transpozice součinu matic]} \\
&\qquad = A - B^T + B^T \quad \text{[definice inverze]} \\
&\qquad = A.
\end{aligned}$$

Dcv. 5.2 Dokažte, že pro $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, kde A regulární, platí
$$(ABA^{-1})^k = AB^k A^{-1}.$$

Řešení:
Postupujeme matematickou indukcí. Pro $k = 1$ tvrzení platí, protože
$$(ABA^{-1})^1 = AB^1 A^{-1}.$$

Indukční krok. Nechť tvrzení platí pro $k - 1$, tedy $(ABA^{-1})^{k-1} = AB^{k-1}A^{-1}$. Upravíme za použití indukčního předpokladu
$$\begin{aligned}
(ABA^{-1})^k &= (ABA^{-1})^{k-1}(ABA^{-1}) = (AB^{k-1}A^{-1})(ABA^{-1}) \\
&= AB^{k-1}(A^{-1}A)BA^{-1} = AB^{k-1}BA^{-1} \\
&= AB^k A^{-1}.
\end{aligned}$$

Dcv. 5.3 Invertujte matici řádu n:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Řešení:

Podle postupu sestavíme rozšířenou matici:

$$(A \mid I_n) = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 & \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Od řádků 2 až n odečteme první řádek a dostaneme

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 2 & \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right).$$

V levé části je vpravo dole je matice stejného typu jako A, pouze o řád menší. Postupujeme tedy indukcí dále a po dalších $n-2$ krocích dostaneme

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & 1 & \dots & 1 & 0 & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Nyní od prvního řádku odečteme druhý, pak od druhého třetí, atd. až od před-posledního ten poslední. Dostaneme matici, kde hledaná inverze A^{-1} je napravo

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 1 & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Grupy

Dcv. 5.4 Zjistěte, zda je (Abelovou) grupou:

(a) $(\mathbb{Q}, \cdot)$,

(b) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \circ)$, kde $a \circ b = |ab|$ pro všechna $a, b \in \mathbb{Q}$,

(c) $(\mathbb{Q}, \circ)$, kde $a \circ b = \frac{a+b}{2}$ pro všechna $a, b \in \mathbb{Q}$,

(d) $(\mathbb{Q}, \circ)$, kde $a \circ b = a + b + 3$ pro všechna $a, b \in \mathbb{Q}$,

(e) $(\mathcal{F}, +)$, tj. množina $\mathcal{F}$ všech reálných funkcí jedné proměnné s operací sčítání funkcí,

(f) množina rotací v $\mathbb{R}^2$ kolem počátku s operací skládání zobrazení.

Řešení:

(a) $(\mathbb{Q}, \cdot)$ není grupou. Součin je sice komutativní i asociativní operace a existuje neutrální prvek 1, ale k číslu 0 neexistuje inverzní prvek.

(b) $(\mathbb{Q}\setminus\{0\}, \circ)$ s operací $a \circ b = |ab|$ není grupou, protože není zaručena existence neutrálního prvku. Pro každé $a < 0$ a číslo e je $a \circ e = |ae| > 0 > a$. Tudíž žádné e nemůže splňovat definici neutrálního prvku pro záporná a.

(c) $(\mathbb{Q}, \circ)$ s operací $a \circ b = \frac{a+b}{2}$ není grupou, protože aritmetický průměr čísel není asociativní. Například pro $a = 1$, $b = 5$, $c = 7$ máme $a \circ (b \circ c) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{5+7}{2}\right) = 3.5 \neq 5 = \frac{1}{2}\left(\frac{1+5}{2} + 7\right) = (a \circ b) \circ c$.

(d) $(\mathbb{Q}, \circ)$ s operací $a \circ b = a + b + 3$ je Abelovou grupou. Asociativita a komutativita platí z asociativity a komutativity sčítání nad $\mathbb{Q}$. Neutrální prvek je $e = -3$, protože pro každé $a \in \mathbb{Q}$ platí

$$a \circ e = a + (-3) + 3 = a = (-3) + a + 3 = e \circ a.$$

Konečně, inverzní prvek k prvku $a \in \mathbb{Q}$ je $a^{-1} = -a - 6$, protože

$$a \circ a^{-1} = a + (-a - 6) + 3 = -3 = e = -3 = (-a - 6) + a + 3 = a^{-1} \circ a.$$

(e) $(\mathcal{F}, +)$ je grupou. Asociativita plyne z definice součtu funkcí a asociativity sčítání nad $\mathbb{R}$. Pro každé $f, g, h \in \mathcal{F}$ a $x \in \mathbb{R}$ platí $f(x) + (g(x) + h(x)) = (f(x) + g(x)) + h(x)$. Neutrální prvek je identicky nulová funkce $e(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Inverzní prvek k funkci $f \in \mathcal{F}$ je funkce $-f$.

(f) Množina rotací v $\mathbb{R}^2$ kolem počátku je Abelovou grupou. Asociativita plyne z asociativity skládání zobrazení. Komutativita platí také, protože uvažujeme rotace v rovině. Neutrálním prvkem je například rotace o 360 stupňů. Inverzním prvkem k rotaci o úhel α je rotace o úhel α v opačném směru.

Dcv. 5.5 Vyplňte tabulku pro binární operaci $\circ$ na G tak aby $(G, \circ)$ byla grupou s neutrálním prvkem 0. Výsledek zdůvodněte.

(a)

$\circ$	0	1
0		
1		

(b)

$\circ$	0
0	

Řešení:

Fakt, že 0 je neutrálním prvkem pro $\circ$ určuje první řádek i sloupec tabulky. Existence levé i pravé inverze omezuje pozice 0 na diagonále nebo symetricky podle diagonály. Asociativita vynutí zbylé pozice. Dostáváme:

(a)

$\circ$	0	1
0	0	1
1	1	0

… aditivní grupa modulo 2, tj. $(\mathbb{Z}_2, +)$

(b)

$\circ$	0
0	0

… triviální grupa,