# 4. Operace s maticemi, regulární a inverzní matice

**Dcv. 4.1** Pro $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ určete následující.

(a) $A(\alpha e_i)$
(b) $A(e_i + e_j)$
(c) $(\alpha e_i)^T A$
(d) $(e_j + e_j)^T A$
(e) $e_i^T A e_j$
(f) $x^T A y$

***Řešení:***

(a) Z vlastnosti součinu můžeme upravit $A(\alpha e_i) = \alpha(A e_i)$. Výraz $A(\alpha e_i)$ tedy odpovídá $\alpha$-násobku $i$-tého sloupce $A_{*i}$. Pro $\alpha = 1$ tak dostaneme známé trvzení $Ae_i = A_{*i}$.

(b) Opět nejprve upravíme $A(e_i + e_j) = Ae_i + Ae_j$. Výraz $A(e_i + e_j)$ tedy odpovídá součtu $i$-tého a $j$-tého sloupce $A_{*i} + A_{*j}$.

(c) Z vlastnosti součinu můžeme upravit $(\alpha e_i)^T A = \alpha(e_i^T A)$. Výraz $(\alpha e_i)^T A$ tedy odpovídá $\alpha$-násobku $i$-tého řádku $A_{i*}$. Pro $\alpha = 1$ tak dostaneme známé trvzení $e_i^T A = A_{i*}$.

(d) Opět nejprve upravíme $(e_j + e_j)^T A = e_j^T A + e_j^T A$. Výraz $(e_j + e_j)^T A$ tedy odpovídá součtu $j$-tého a $j$-tého řádku $A_{j*} + A_{j*}$.

(e) Aplikací předchozích vztahu postupným násobením dostáváme $(e_i^T A)e_j = A_{i*}e_j = A_{ij}$. Výraz $e_i A e_j$ tedy odpovídá výběru prvku $a_{ij}$.

(f) Využijeme všech předchozích vztahů a faktu, že vektory $x, y$ můžeme vyjádřit jako kombinace $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_me_m$ a $y = y_1e_1 + y_2e_2 + \ldots + y_ne_n$. Poté

$$x^T A y = (x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_me_m)^T A(y_1e_1 + y_2e_2 + \ldots + y_ne_n).$$

Z distributivity, asociativity a vztahu $e_i^T A e_j$ postupně dostáváme

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_ie_j)^T A(y_je_j) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_iy_je_i^T Ae_j = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_iy_jA_{ij}.$$

**Dcv. 4.2** Vyjádřete elementární řádkové úpravy pomocí násobení matic.

***Řešení:***

(a) Vynásobení $i$-tého řádku skalárem $\alpha \neq 0$ můžeme zapsat pomocí matice

$$E_i(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tedy vezmeme jednotkovou matici a na pozici $(i,i)$ zaměníme 1 za $\alpha$. Násobením touto maticí **zleva** násobíme $i$-tý řádek konstantou $\alpha$.

To můžeme ověřit z definice násobení. Nechť $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je libovolná matice a $E_i(\alpha) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ je matice popsaná výše. Potom pro libovolný řádek $j \in \{1,\dots,m\}$ a sloupec $k \in \{1,\dots,n\}$ matice $E_i(\alpha)A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ platí:

$$\begin{aligned}
(E_i(\alpha)A)_{jk} &= \sum_{\ell} (E_i(\alpha))_{j\ell} A_{\ell k} \\
&= (E_i(\alpha))_{jj} A_{jk} && ((E_i(\alpha))_{j\ell} \neq 0 \text{ pouze pro } \ell = j) \\
&= \begin{cases} A_{jk} & \text{pro } j \neq i \\ \alpha A_{jk} & \text{pro } j = i \end{cases} && (\text{dosadíme za } (E_i(\alpha))_{jj})
\end{aligned}$$

Vidíme, že $E_i(\alpha)A$ má všechny řádky kromě $i$-tého shodné s maticí $A$ a $i$-tý řádek je vynásoben skalárem $\alpha$.

(b) Přičtení $\alpha$-násobku $j$-tého řádku k $i$-tému řádku, kde $i \neq j$. Můžeme zapsat pomocí matice

$$E_{ij}(\alpha) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} \phantom{1} & j & \phantom{\dots} & \phantom{\dots} & \phantom{0} \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & \ddots & \vdots \\ & \alpha & & \ddots & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Tedy vezmeme jednotkovou matici a na pozici $(i,j)$ zaměníme nulu za $\alpha$. Násobením touto maticí **zleva** přičítáme $\alpha$-násobek $j$-tého řádku k $i$-tému.

Ověření provedeme z definice násobení matic. Nechť $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je libovolná matice a $E_{ij}(\alpha) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ je matice popsaná výše. Potom pro libovolný řádek $k \in \{1,\dots,m\}$ a sloupec $h \in \{1,\dots,n\}$ matice $E_{ij}(\alpha)A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ platí:

$$\begin{aligned}
(E_{ij}(\alpha)A)_{kh} &= \sum_{\ell} (E_{ij}(\alpha))_{k\ell} A_{\ell h} \\
&= \begin{cases} (E_{ij}(\alpha))_{kk} A_{kh} & \text{pro } k \neq i \\ (E_{ij}(\alpha))_{kk} A_{kh} + (E_{ij}(\alpha))_{kj} A_{jh} & \text{pro } k = i \end{cases} \\
&\qquad\qquad (\text{pro ostatní hodnoty } m \text{ je } (E_{ij}(\alpha))_{k\ell} = 0) \\
&= \begin{cases} A_{kh} & \text{pro } k \neq i \\ A_{kh} + \alpha A_{jh} & \text{pro } k = i \end{cases} \\
&\qquad\qquad (\text{dosadíme příslušné hodnoty z matice } E_{ij}(\alpha))
\end{aligned}$$

Vidíme, že všechny řádky kromě $i$-tého zůstaly zachovány a k $i$-tému řádku jsme přičetli $\alpha$ násobek $j$-tého řádku.

(c) Prohození $i$-tého a $j$-tého řádku můžeme zapsat pomocí matice

$$E_{ij} = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} i & j \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ & \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Tedy vezmeme jednotkovou matici a prohodíme její $i$-tý a $j$-tý řádek. Násobením touto maticí **zleva** prohazujeme $i$-tý a $j$-tý řádek.

Ověření zase provedeme z definice násobení. Nechť $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je libovolná matice $E_{ij} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ je matice popsaná výše. Potom pro libovolný řádek $k \in \{1, \ldots, m\}$ a sloupec $h \in \{1, \ldots, n\}$ matice $E_{ij}A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ platí:

$$\begin{aligned}
(E_{ij}A)_{kh} &= \sum_{\ell} (E_{ij})_{k\ell} A_{\ell h} \\
&= \begin{cases} (E_{ij})_{kk} A_{kh} & \text{pro } k \neq i, j \\ (E_{ij})_{ki} A_{ih} & \text{pro } k = j \\ (E_{ij})_{kj} A_{jh} & \text{pro } k = i \end{cases} \quad (\text{pro ostatní hodnoty } \ell \text{ je } (E_{ij})_{k\ell} = 0) \\
&= \begin{cases} A_{kh} & \text{pro } k \neq i, j \\ A_{ih} & \text{pro } k = j \\ A_{jh} & \text{pro } k = i \end{cases} \quad (\text{dosadíme příslušné hodnoty z matice } (E_{ij}))
\end{aligned}$$

Vidíme, že $(E_{ij})A$ má všechny řádky kromě $i$-tého a $j$-tého shodné s maticí $A$ a $i$-tý a $j$-tý řádek jsou prohozeny.

**Dcv. 4.3** Co dělají matice elementárních řádkových úprav při násobení matice $A$ zprava?

***Řešení:***

K odpovědi bychom mohli dojít několika způsoby. Jedna možnost by byla vynásobit postupně matici $A$ maticemi elementárních řádkových úprav zprava a zanalyzovat výsledek. My však využijeme toho, že víme, co se děje při násobení maticemi elementárních řádkových úprav zleva a vlastností transpozice matic. Pokud je $E$ jedna z matic úprav, dostáváme

$$(AE)^T = E^T A^T.$$

Na tento vztah se dá nahlížet tak, že sloupce $AE$ odpovídají řádkům $E^T A^T$. Z definice matic elementárních řádkových úprav je snadné nahlédnout, jak vypadají jejich transpozice. Konkrétně

- $(E_i(\alpha))^T = E_i(\alpha)$,
- $(E_{ij}(\alpha))^T = E_{ji}(\alpha)$,
- $(E_{ij})^T = E_{ij}$.

Zatímco pro první a třetí úpravu je transpozice rovna původní matici, pro přičtení $\alpha$-násobku $j$-tého řádku i $i$-tému se transpozicí změní na příčtení $\alpha$-násobku $i$-tého řádku k $j$-tému.

Vidíme tedy, že $E^T A^T$ odpovídá provádění elementárních řádkových úprav na řádky matice $A^T$, které odpovídají sloupcům matice $A$. Kombinací všech těchto pozorování dostáváme následující závěr.

(a) Sloupce $AE_i(\alpha)$ odpovídají řádkům $E_i(\alpha)A^T$. Aplikací této úpravy zprava vynásobíme $i$-tý sloupec matice $A$ skalárem $\alpha$.

(b) Sloupce $AE_{ij}(\alpha)$ odpovídají řádkům $E_{ji}(\alpha)A^T$. Aplikací této úpravy přičteme $\alpha$-násobek $i$-tého sloupce k $j$-tému sloupci matice $A$.

(c) Sloupce $AE_{ij}$ odpovídají řádkům $E_{ij}A^T$. Aplikací této úpravy zprava prohodíme $i$-tý a $j$-tý sloupec matice $A$.

**Dcv. 4.4** Najděte inverzní matici k matici

$$\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$$

***Řešení:***

Využijeme algoritmu, kdy pomocí Gaussovy–Jordanovy (G-J) eliminace převedeme matici $(A \mid I_n)$ na tvar $(I_n \mid A^{-1})$.

Pomocí G-J eliminace dostáváme

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} d_1 & & 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & d_n & 0 & & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & \frac{1}{d_1} & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 & & \frac{1}{d_n} \end{array}\right)$$

Jediné, co G-J eliminace provádí za operace je přeškálování řádků, protože první podmatice je již v diagonálním tvaru.

Inverzní matice existuje ale jen tehdy, když všechny hodnoty $d_1, \ldots, d_n$ jsou nenulové. V opačném případě je matice singulární, a tudíž inverzi nemá.