13. Isomorfismus

Cv. 13.1 Mějme lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadané obrazem báze B:

$$\begin{aligned} f(2,1,1) &= (1,2,3)^T, \\ f(1,3,5) &= (3,2,1)^T, \\ f(7,1,4) &= (1,1,1)^T. \end{aligned}$$

Zjistěte, jestli je zobrazení prosté (pokud není, najděte vektory $u, v \in \mathbb{R}^3$ takové, že $u \neq v \wedge f(u) = f(v)$) a jestli je „na“ (pokud ne, najděte vektor, který nemá předobraz, tedy $u \in \mathbb{R}^3$ takové že $\forall v \in \mathbb{R}^3\colon f(v) \neq u$). Určete dimenzi a bázi obrazu a jádra tohoto lineárního zobrazení.

Řešení:

Prostota: Napřed určíme, jestli je zobrazení prosté (injektivní). Pokud by nebylo, pak by nutně existovaly dva různé vektory $u, v \in \mathbb{R}^3$ (z definičního oboru) takové, že $f(u) = f(v)$. Upravme si tuto situaci:

$$\begin{aligned} f(u) &= f(v), \\ {}_A[f]_B \cdot [u]_B &= {}_A[f]_B \cdot [v]_B, \\ {}_A[f]_B \cdot [u]_B - {}_A[f]_B \cdot [v]_B &= o, \\ {}_A[f]_B \cdot ([u]_B - [v]_B) &= o, \end{aligned}$$

kde ${}_A[f]_B$ značí matici lineárního zobrazení a $[u]_B, [v]_B$ značí vektory souřadnic vektorů u, v vůči bázi B, tedy $[f(u)]_A = {}_A[f]_B \cdot [u]_B$. V našem případě je báze A kanonická báze. Tedy pokud je zobrazení prosté, pak jeho matice má ve svém jádře jediný vektor o.

Sestrojíme tedy matici (bude brát vektory souřadnic v bázi B a vracet vektory souřadnic v kanonické bázi):

$$_{\text{kan}}[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pomocí Gaussovy eliminace najdeme její jádro:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & -8 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že jádro má dimenzi jedna a všechna řešení této homogenní soustavy mají tvar: $\left\{(-\frac{1}{4}t, -\frac{1}{4}t, t)^T;\ t \in \mathbb{R}\right\}$. Můžeme volit vektor $[u]_B = (1, 1, -4)^T$, tedy

$$u = 1 \cdot (2,1,1)^T + 1 \cdot (1,3,5)^T - 4 \cdot (7,1,4)^T = (-25, 0, -10)^T,$$

který se zobrazí na nulu (stejně jako nulový vektor)

$$f(0,0,0) = (0,0,0)^T = f(-25, 0, -10).$$

Všimněte si, že souřadnice vektoru z jádra matice byly vůči bázi B, my chtěli souřadnice vektoru u v kanonické bázi, museli jsme tedy ještě řešit převod mezi souřadnicemi.

Dimenze jádra: Vzhledem k tomu, že jádro lineárního zobrazení má dimenzi jedna, tak jeho bázi může tvořit například vektor $u = (-25, 0, -10)^T$ (vzpomeňte, jak jsme na něj přišli – platí, že $[(-25, 0, -10)^T]_B = (1, 1, -4)$).

Obraz a surjektivita (jestli je „na"): Každý vektor z obrazu je lineární kombinací sloupcových vektorů. Speciálně existuje vektor $a \in \mathbb{R}^3$ takový, že $f(a) = (1, 2, 3)^T$ (psáno v kanonické bázi), to byl náš zadaný vektor $(2, 1, 1)^T$, který měl v bázi B souřadnice $[(2, 1, 1)^T]_B = (1, 0, 0)^T$.

Z minulé Gaussovy eliminace vidíme, že dimenze obrazu (což je dimenze sloupcového prostoru, což dle věty z přednášky je rovné dimenzi řádkového prostoru) je rovná dvěma a její báze jsou například první dva sloupci matice ${}_{\mathrm{kan}}[f]_B$, tedy vektory $(1, 2, 3)^T$, $(3, 2, 1)^T$ (obraz je pak lineární obal těchto dvou vektorů). Dimenze obrazu je tedy dva a zobrazení f není „na".

Vektor mimo obraz: Doplněním těchto dvou vektorů na bázi $\mathbb{R}^3$ získáme vektor, který nemá předobraz ve zobrazení f. Například to může být vektor $(0, 0, 1)^T$ (pokud bychom nedoplňovali z kanonické báze, ale z jiné, mohl nám vyjít jiný vektor).

Cv. 13.2 Rozhodněte, zda zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dané předpisem

$$f(x, y, z) = (x + y - 2z,\ y - z,\ x - y)^T$$

je isomorfismem $\mathbb{R}^3$ na sebe sama (takzvaným automorfismem).

Řešení:

Isomorfismus dvou vektorových prostorů je vzájemně jednoznačné lineární zobrazení (tedy lineární zobrazení, které je bijekce). Budeme chtít zjistit dimenzi jádra (pokud je zobrazení prosté, tak má být nulová) a dimenzi obrazu = dimenzi sloupcového prostoru (pokud má být zobrazení „na", tak musí být stejná jako dimenze prostoru, do kterého to zobrazení jde).

Sestavíme matici zobrazení vůči kanonické bázi (jakákoliv báze by posloužila stejně):

$${}_{\mathrm{kan}}[f]_{\mathrm{kan}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Abychom určili rank této matice, provedeme Gaussovu eliminaci:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že dimenze jádra matice je rovna jedné, takže zobrazení není prosté. To můžeme i snadno ověřit: $f(0, 0, 0) = (0, 0, 0)^T = f(1, 1, 1)$.

Obdobně dimenze sloupcového prostoru je rovná dvěma (vzpomeňte na větu, že dimenze sloupcového a řádkového prostoru se rovnají). Tedy funkce není „na".

Opět bychom mohli ověřit, že například vektor $(0,0,1)^T$ není v obraze (stejná Gaussova eliminace doplněná o pravou stranu).

Závěr: zobrazení f není isomorfismem.

Cv. 13.3 Rozhodněte, jestli jsou následující dvojice vektorových prostorů isomorfní. Pokud ano, najděte vhodný isomorfismus.

(a) $\mathbb{R}^{2\times 2}$ a $\mathbb{R}^4$,

(b) $\mathbb{R}^4$ a $\mathcal{P}^3$ (prostor reálných polynomů stupně nejvýš tři),

(c) $\mathbb{R}^{m\times n}$ a $\mathbb{R}^{n\times m}$,

(d) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}^n$ nad $\mathbb{C}$,

(e) $\mathbb{R}^2$ a $\{x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 0\}$,

(f) $\mathbb{R}^4$ a prostor lineárních zobrazení $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$.

Řešení:
Dva vektorové prostory jsou isomorfní právě tehdy, když mají stejnou dimenzi a fungují nad stejným tělesem.

(a) Ano, oba mají dimenzi 4. Není těžké rozmyslet, že isomorfismem je například zobrazení
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a,b,c,d)^T.$$

(b) Ano, oba mají dimenzi 4. Reálný polynom stupně nejvýš tři
$$p(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3$$
můžeme reprezentovat jako uspořádanou čtveřici $(p_0, p_1, p_2, p_3)^T$. Isomorfismem zde je
$$(p_0, p_1, p_2, p_3)^T \mapsto p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3.$$

(c) Ano, isomorfismem bude například transpozice
$$A \mapsto A^T.$$

(d) Ne, prostory nepracují nad stejným tělesem.

(e) Ano, oba mají dimenzi 2. můžeme volit například zobrazení
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto (a, -a, b, -b)^T.$$

(f) Ano, vektoru $u \in \mathbb{R}^4$ přiřadíme lineární zobrazení $f(x) = u^Tx$. Naopak každé lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ se dá zapsat maticí s jedním řádkem a čtyřmi sloupci (věta z přednášky).

Cv. 13.4 Buď $f\colon U \to V$ isomorfismus a $x_1, \ldots, x_n \in U$. Dokažte, že jsou-li $x_1, \ldots, x_n$ lineárně nezávislé, pak i $f(x_1), \ldots, f(x_n)$ jsou lineárně nezávislé.

Řešení:

Mějme, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ takové, že $\sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i) = o$. Dostáváme

$$o = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x)_i = f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right).$$

Pro isomorfismus platí, že $f(x) = o$ právě tehdy, když $x = o$. Proto také $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = o$. Z lineární nezávislosti $x_1, \dots, x_n$ dostáváme, že $\alpha_i = 0$ pro všechny i, tedy $f(x_1), \dots, f(x_n)$ jsou lineárně nezávislé.

Cv. 13.5 Jak poznáme ze zadané matice $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ lineárního zobrazení $f\colon U \to V$, že zobrazení f je prosté, resp. „na“?

Řešení:
Lineární zobrazení je prosté právě tehdy, když $\mathrm{Ker}(f) = \{o\}$. Z toho plyne, že je zobrazení prosté právě tehdy, když

$$\mathrm{Ker}(A) = \{o\}.$$

Jinými slovy, musí $0 = \dim \mathrm{Ker}(A) = n - \mathrm{rank}(A)$, neboli $\mathrm{rank}(A) = n$. To znamená, že matice A má lineárně nezávislé sloupce.

Lineární zobrazení je „na“ právě tehdy, když dimenze obrazu odpovídá dimenzi prostoru V. Z toho plyne, že lineární zobrazení je „na“ právě tehdy, když

$$\mathrm{rank}(A) = m.$$

To znamená, že matice A má lineárně nezávislé řádky.

Cv. 13.6 Najděte příklady lineárních zobrazení (vyjádřených například maticově $f(x) = Ax$) takových, aby zobrazení

(a) bylo prosté a „na“,
(b) bylo prosté, ale nebylo „na“,
(c) nebylo prosté, ale bylo „na“,
(d) nebylo ani prosté, ani „na“.

Řešení:
Toto je kreativní příklad. Detailnější podmínky na matici A, aby příslušné lineární zobrazení bylo / nebylo prosté či „na“ rozebereme později ve Cv. 13.5.

(a) Například $A = I_2$. Zobrazení je tudíž identita a zřejmě je prosté i „na“.
(b) Například $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Zobrazení není „na“, protože sloupce matice A vygenerují pouze dvoudimenzionální podprostor v prostoru $\mathbb{R}^3$. Na druhou stranu, zobrazení je prosté, protože vztah $Ax = Ay$ vede na rovnici $A(x - y) = 0$, která má pouze triviální řešení $x = y$.
(c) Například $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Zobrazení pak není prosté, protože $A(1, 1, 1)^T = (2, 2)^T = A(0, 0, 2)^T$. Zobrazení je ale „na“, protože ve sloupcích matice A je kanonická báze prostoru $\mathbb{R}^2$, tudíž vygenerujeme jakýkoli vektor v $\mathbb{R}^2$.
(d) Například $A = 0$.

Cv. 13.7 Rozhodněte, zda je dané lineární zobrazení prosté a zda je „na“:

(a) $f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^3$ dané předpisem $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b+c,\ a+b,\ a)^T$,

(b) $f\colon \mathcal{P}^2 \to \mathbb{R}^4$ dané předpisem $f(ax^2+bx+c) = (a+b,\ 2b-c,\ a-b+c,\ a+b)^T$,

(c) $f\colon \mathcal{P}^2 \to \mathbb{R}^3$ dané předpisem $f(ax^2+bx+c) = (a+b,\ c,\ a+b)^T$,

(d) $f\colon \mathcal{P}^2 \to \mathbb{R}^3$ dané předpisem $f(ax^2+bx+c) = (a+b,\ 2b-c,\ a-b)^T$.

<u>Řešení</u>:

Ve všech případech můžeme vycházet z toho, že lineární zobrazení $f\colon U \to V$ je prosté právě tehdy, když

$$\mathrm{Ker}(f) = \{o\}$$

a je „na“ právě tehdy, když

$$\dim f(U) = \dim V.$$

(a) Zobrazení není prosté, protože

$$(a+b+c, a+b, a)^T = (0,0,0)^T$$

má netriviální řešení, například $a = b = c = 0$ a $d \in \mathbb{R}$.
Zobrazení je „na“, protože dimenze prostoru

$$\{(a+b+c, a+b, c)^T;\ a,b,c \in \mathbb{R}\}$$

je 3. To lze nahlédnout například tak, že lze vygenerovat vhodnout volbou koeficientů a, b, c vektory $(1,1,1)^T, (1,1,0)^T, (1,0,0)^T$, které jsou lineárně nezávislé.

(b) Zobrazení není prosté, protože rovnice

$$(a+b,\ 2b-c,\ a-b+c,\ a+b)^T = (0,0,0,0,0)^T$$

má množinu řešení $\{(a,-a,-2a)^T;\ a \in \mathbb{R}\}$.
Zobrazení není ani „na“, protože $\mathcal{P}^2$ má dimenzi 3, zatímco $\mathbb{R}^4$ má dimenzi 4. Při lineárním zobrazení se může dimenze zachovat nebo se snížit.

(c) Zobrazení není prosté, protože rovnice

$$(a+b,\ c,\ a+b)^T = (0,0,0)^T$$

má množinu řešení $\{(a,-a,0)^T;\ a \in \mathbb{R}\}$.
Zobrazení není ani „na“, protože hodnoty v první a poslední složce jsou si vždy rovny. V obrazu tedy neleží například vektor $(1,0,0)^T$.

(d) Zobrazení je prosté, protože rovnice

$$(a+b,\ 2b-c,\ a-b)^T = (0,0,0)^T$$

má pouze triviální řešení.
Zobrazení je „na“, protože množina obrazů $\{(a+b, c, a-b)^T;\ a,b,c \in \mathbb{R}\}$ se dá vyjádřit jako

$$\{a(1,0,1)^T + b(1,0,-1)^T + c(0,1,0)^T;\ a,b,c \in \mathbb{R}\}.$$

Vidíme, že obrazem je lineární obal vektorů $(1,0,1)^T$, $(1,0,-1)^T$, $(0,1,0)^T$, které jsou lineárně nezávislé. Dimenze obrazu je proto 3, stejně jako dimenze prostoru $\mathcal{P}^2$.