

10. Dimenze, maticové prostory

Báze a dimenze

Cv. 10.1 Najděte bázi a určete dimenzi následujících vektorových prostorů:

- (a) $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ nad \mathbb{R} ,
- (b) prostor symetrických matic v $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ nad \mathbb{R} .

Cv. 10.2 Buďte U, V podprostory vektorového prostoru W a necht' $\dim U = 7$, $\dim V = 8$, $\dim W = 13$.

- (a) Odhadněte zdola a shora hodnotu $\dim(U + V)$ a najděte konkrétní příklady, kdy se obě meze nabydou.
- (b) Odhadněte zdola a shora hodnotu $\dim(U \cap V)$ a opět ukažte, že je odhad těsný.

Maticové prostory

Cv. 10.3 Buď

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Postupně nad tělesy \mathbb{R} a \mathbb{Z}_5 rozhodněte, zda platí:

- (a) $v \in \text{Ker}(A)$,
- (b) $v \in \mathcal{S}(A)$.

Cv. 10.4 Najděte báze prostorů $\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{S}(A)$ a $\text{Ker}(A)$ pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Cv. 10.5 Z vektorů vyberte bázi prostoru $V = \text{span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ a pro ostatní vektory najděte souřadnice vůči této bázi:

$$v_1 = (3, 1, 5, 4)^T, \quad v_2 = (2, 2, 3, 3)^T, \quad v_3 = (1, -1, 2, 1)^T, \quad v_4 = (1, 3, 1, 1)^T.$$

Cv. 10.6 Určete, jaký je vztah mezi prostory $\text{Ker}(AB)$ a $\text{Ker}(B)$ pro matice

- (a) $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$,
- (b) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulární, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$.