10. Dimenze, maticové prostory

Báze a dimenze

Cv. 10.1 Najděte bázi a určete dimenzi následujících vektorových prostorů:

(a) $\mathbb{R}^{2\times 2}$ nad $\mathbb{R}$,

(b) prostor symetrických matic v $\mathbb{R}^{2\times 2}$ nad $\mathbb{R}$.

Řešení:

(a) Bázi tvoří například $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$. Dimenze je tudíž 4.

(b) Bázi tvoří například $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$. Dimenze je tudíž 3.

Cv. 10.2 Buďte U, V podprostory vektorového prostoru W a nechť $\dim U = 7$, $\dim V = 8$, $\dim W = 13$.

(a) Odhadněte zdola a shora hodnotu $\dim(U+V)$ a najděte konkrétní příklady, kdy se obě meze nabydou.

(b) Odhadněte zdola a shora hodnotu $\dim(U \cap V)$ a opět ukažte, že je odhad těsný.

Řešení:

(a) Protože oba prostory U, V jsou podprostory prostoru $U + V$, musí platit $\dim U \leq \dim(U + V)$ a $\dim V \leq \dim(U + V)$. To nám dává první odhad zdola $\dim(U+V) \geq 8$. Zároveň není těžké nahlédnout, že je odhad těsný, to znamená, že se někdy může nabýt jako rovnost. Uvažujme například prostor $W = \mathbb{R}^{13}$ a jeho podprostory $U = \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_7\}$, $V = \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_8\}$. Potom $U + V = V$, čili $\dim(U + V) = \dim V = 8$.

Pro odhad shora stačí využít toho, že oba prostory U, V jsou podprostory prostoru W. Proto musí platit $\dim(U + V) \leq \dim W$. To vede na odhad $\dim(U + V) \leq 13$. I tento odhad je těsný. Uvažujme opět prostor $W = \mathbb{R}^{13}$, ale tentokrát s podprostory $U = \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_7\}$, $V = \operatorname{span}\{e_6, \ldots, e_{13}\}$. V tomto případě $U + V = W$, a tak $\dim(U + V) = \dim W = 13$.

(b) Zde využijeme větu o dimenzi spojení a průniku podprostorů, která říká

$$\dim U + \dim V = \dim(U + V) + \dim(U \cap V).$$

V našem případě má věta tvar

$$\dim(U \cap V) = \dim U + \dim V - \dim(U + V) = 15 - \dim(U + V).$$

Pro odhady zdola a shora využijme předchozí odhady na $\dim(U + V)$ a dostaneme

$$\dim(U \cap V) = 15 - \dim(U + V) \leq 15 - 8 = 7$$

a

$$\dim(U \cap V) = 15 - \dim(U + V) \leq 15 - 13 = 2.$$

Odhady jsou opět těsné, o čemž nás přesvědčí stejné příklady jako v předchozím bodu.

Maticové prostory

Cv. 10.3 Buď

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Postupně nad tělesy $\mathbb{R}$ a $\mathbb{Z}_5$ rozhodněte, zda platí:

(a) $v \in \mathrm{Ker}(A)$,

(b) $v \in \mathcal{S}(A)$.

Řešení:
Z definice jádra a sloupcového prostoru matice platí

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(A) &= \{x \in \mathbb{T}^n;\ Ax = 0\}, \\ \mathcal{S}(A) &= \mathrm{span}\{A_{*1}, \ldots, A_{*n}\} = \{Ax;\ x \in \mathbb{T}^n\}, \end{aligned}$$

stačí tedy ověřit, zda vektor $v = (1,2)^T$ řeší soustavu $Ax = 0$ nad daným tělesem a zda platí $Ax = v$ pro nějaké $x \in \mathbb{T}^2$.

Nad tělesem $\mathbb{R}$:

(a) vektor v nepatří do jádra matice A, protože

$$Av = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

(b) vektor v patří do sloupcového prostoru matice A, protože soustava

$$\left(A \mid v\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

má řešení, konkrétně platí $(1,2)^T = \frac{3}{5}(1,3)^T + \frac{1}{5}(2,1)^T$.

Nad tělesem $\mathbb{Z}_5$:

(a) vektor v patří do $\mathrm{Ker}(A)$, protože

$$Av = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

(b) vektor v nepatří do $\mathcal{S}(A)$, protože soustava

$$\left(A \mid v\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

nemá nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ řešení.

Cv. 10.4 Najděte báze prostorů $\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{S}(A)$ a $\mathrm{Ker}(A)$ pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Řešení:
Převedeme matici A do redukovaného odstupňovaného tvaru RREF(A):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{RREF}(A).$$

Bázi řádkového prostoru $\mathcal{R}(A)$ tvoří (například) nenulové vektory v řádcích výsledné matice, tedy vektory $(1, 2, 0, 1)^T$, $(0, 0, 1, 1)^T$. Důvodem je, že elementární řádkové úpravy nemění řádkový prostor matice, a tedy $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(\,\mathrm{RREF}(A))$. Najít bázi řádkového prostoru matice RREF(A) je pak jednoduché – jsou to všechny nenulové řádky.

Bázi sloupcového prostoru můžeme vybrat z původních sloupců matice A, které odpovídají bázickým sloupcům odstupňovaného tvaru. Bázické sloupce jsou první a třetí, tedy vektory $(1, 2, 3)^T$ a $(2, 1, 1)^T$ tvoří bázi $\mathcal{S}(A)$. Zdůvodnění je teď jiné, než v případě řádkového prostoru, protože elementární řádkové úpravy obecně mohou změnit sloupový prostor matice. Co ale elementární řádkové úpravy nemění, je lineární závislost a nezávislost mezi sloupci. Tudíž můžeme tvrdit: bázi $\mathcal{S}(\,\mathrm{RREF}(A)$ tvoří první a třetí sloupec matice RREF(A), proto bázi $\mathcal{S}(A)$ tvoří první a třetí sloupec matice A.

Bázi jádra matice A získáme z řešení soustavy $Ax = 0$. Množinu všech řešení této soustavy můžeme vyjádřit pomocí nebázických proměnných x_2, x_4 ve tvaru

$$(-2x_2 - x_4, x_2, -x_4, x_4)^T = (-2, 1, 0, 0)^T x_2 + (-1, 0, -1, 1)^T x_4.$$

Bázi Ker(A) tedy tvoří např. vektory $(-2, 1, 0, 0)^T$, $(-1, 0, -1, 1)^T$.

Cv. 10.5 Z vektorů vyberte bázi prostoru $V = \mathrm{span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ a pro ostatní vektory najděte souřadnice vůči této bázi:

$$v_1 = (3, 1, 5, 4)^T,\ v_2 = (2, 2, 3, 3)^T,\ v_3 = (1, -1, 2, 1)^T,\ v_4 = (1, 3, 1, 1)^T.$$

Řešení:
Zapíšeme jednotlivé vektory do sloupců matice A, kterou převedeme do redukovaného odstupňovaného tvaru

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{RREF}(A).$$

Připomeňme, že elementární řádkové úpravy zachovávají lineární závislost a nezávislost mezi sloupci, a to dokonce i konkrétní lineární kombinace. Tudíž z matice RREF(A) snadno vyčteme nejen bázi prostoru $\mathcal{S}(A) = V$, ale i hledané souřadnice.

Vidíme, že bázické sloupce jsou první, druhý a čtvrtý. Bázi prostoru $\mathcal{S}(A) = V$ tedy tvoří původní vektory $v_1 = (3, 1, 5, 4)^T$, $v_2 = (2, 2, 3, 3)^T$ a $v_4 = (1, 3, 1, 1)^T$.

Ze třetího sloupce upravené matice RREF(A) dostaneme souřadnice vektoru v_3 vzhledem k bázi $B = \{v_1, v_2, v_4\}$, neboť platí

$$v_3 = (1, -1, 2, 1)^T = 1 \cdot (3, 1, 5, 4)^T + (-1) \cdot (2, 2, 3, 3)^T,$$

a tedy $[v_3]_B = (1, -1, 0)^T$.

Cv. 10.6 Určete, jaký je vztah mezi prostory $\mathrm{Ker}(AB)$ a $\mathrm{Ker}(B)$ pro matice

(a) $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$,

(b) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulární, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$.

Řešení:

(a) Nechť $x \in \mathrm{Ker}(B)$, pak z definice jádra platí $Bx = o$. Vektor x patří také do jádra matice AB, protože

$$(AB)x = A(Bx) = Ao = o,$$

dostaneme tedy inkluzi $\mathrm{Ker}(B) \subseteq \mathrm{Ker}(AB)$. Obrácená inkluze obecně neplatí, např. pro $A = 0_n$ a $B = I_n$ je vektor $y = (1, 0, \ldots, 0)^T$ v jádru matice AB, ale nikoliv v jádru matice B.

(b) Nahlédneme, že pro regulární matici A platí také inkluze $\mathrm{Ker}(AB) \subseteq \mathrm{Ker}(B)$, a tedy můžeme psát $\mathrm{Ker}(AB) = \mathrm{Ker}(B)$.

Důkaz. Nechť $x \in \mathrm{Ker}(AB)$, potom $(AB)x = o$. Z regularity matice A existuje inverzní matice A^{-1}, pro kterou platí

$$Bx = (A^{-1}A)Bx = A^{-1}((A\ B)x) = A^{-1}o\ = o,$$

z čehož plyne $x \in \mathrm{Ker}(B)$.