

9. Lineární nezávislost, báze vektorového prostoru

Lineární závislost a nezávislost

Cv. 9.1 Zjistěte zda jsou vektory z \mathbb{R}^3 lineárně nezávislé:

(a) $(2, 3, -5)^T, (1, -1, 1)^T, (3, 2, -2)^T$.

(b) $(2, 0, 3)^T, (1, -1, 1)^T, (0, 2, 1)^T$.

Cv. 9.2 Nechtě u, v, w jsou lineárně nezávislé vektory z vektorového prostoru V nad \mathbb{R} . Rozhodněte, zda-li jsou následující množiny lineárně nezávislé.

(a) $\{u, v, o\}$,

(b) $\{w, v, u\}$,

(c) $\{u, u + v, u + w\}$,

(d) $\{u - v, u - w, v - w\}$.

Cv. 9.3 Nechtě V je vektorový prostor nad tělesem \mathbb{T} a mějme dvě množiny vektorů $X \subseteq Y \subseteq V$. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

(a) Je-li X nezávislá, pak je Y závislá.

(b) Je-li X nezávislá, pak je Y nezávislá.

(c) Je-li X závislá, pak je Y závislá.

(d) Je-li Y nezávislá, pak je X nezávislá.

(e) Je-li Y závislá, pak je X závislá.

Cv. 9.4 Určete, zda následující vektory jsou lineárně nezávislé v prostoru reálných funkcí $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (nad tělesem \mathbb{R}): $\{2x - 1, x - 2, 3x\}$.

Cv. 9.5 Najděte čtyři lineárně závislé vektory z \mathbb{R}^4 tak, aby:

(a) právě jeden vektor byl lineárně závislý na ostatních,

(b) právě dva vektory byly lineárně závislé na ostatních třech,

(c) právě tři vektory byly lineárně závislé na ostatních třech,

(d) každý z nich byl lineárně závislý na ostatních třech,

Báze a souřadnice

Cv. 9.6 Zjistěte, zda $(-1, 5, 3)^T \in \text{span}\{(1, 2, 2)^T, (4, 1, 3)^T\}$.

Pokud ano, tak určete souřadnice vektoru vzhledem k dané bázi.

Cv. 9.7 V prostoru \mathcal{P}^2 najděte souřadnice vektoru $x^2 + 2$ vzhledem k bázi $x^2 + 1, x - 2, 2x^2 + x - 1$.