8. Vektorové prostory a podprostory, lineární obal

Vektorové prostory a podprostory

Cv. 8.1 Rozhodněte, zda následující množiny vektorů tvoří podprostor $\mathbb{R}^2$:

(a) $\{(s, s^2)^T;\ s \in \mathbb{R}\}$,
(b) $\{(s-t, 2t)^T;\ s, t \in \mathbb{R}\}$.

Řešení:
Aby množina tvořila podprostor $\mathbb{R}^2$, je třeba, aby obsahovala $(0,0)^T$ a byla uzavřená na operace sčítání a násobení skalárem.

(a) Není podprostorem, neboť množina není uzavřena ani na násobky, ani na součty. Například vektor $(1,1)^T$ leží v množině, ale její násobek $(2,2)^T$ už nikoli.
(b) Nulový vektor v množina pro $t = 0$, $s = 0$ leží. Uzavřenost na součty a součiny také platí:
- $(a-b, 2b)^T + (c-d, 2d)^T = ((a+c)-(b+d), 2(b+d))^T$,
- $\alpha(t-s, 2s)^T = (\alpha t - \alpha s, 2\alpha s)^T$.

Cv. 8.2 Rozhodněte, zda následující tvoří podprostor prostoru reálných posloupností $\mathbb{R}^\infty = \{(x_1, x_2, \dots);\ x_i \in \mathbb{R},\ i \in \mathbb{N}\}$:

(a) posloupnosti s nekonečně mnoha nulami,
(b) posloupnosti s konečně mnoha nulami.

Řešení:

(a) Ne, nejsou uzavřené na součet.
Například $(0,1,0,1,\dots) + (1,0,1,0,\dots) = (1,1,1,1,\dots)$
(b) Ne, posloupnost samých nul jako nulový prvek nenáleží do této množiny.

Lineární obal, lineární kombinace

Cv. 8.3 Buď V vektorový prostor a $M, N \subseteq V$ množiny vektorů. Rozhodněte, zda platí

(a) $\operatorname{span}(\operatorname{span}(M)) = \operatorname{span}(M)$,
(b) $M \subseteq N \ \Rightarrow\ \operatorname{span}(M) \Subset \operatorname{span}(N)$,
(c) $M \subseteq N \ \Leftarrow\ \operatorname{span}(M) \Subset \operatorname{span}(N)$.

Řešení:
Ukážeme dva možné způsoby řešení, podle toho, jakou charakterizaci lineárního obalu použijeme.

První způsob. Podle první definice je lineární obal $\operatorname{span}(M)$ množiny M tvořený průnikem všech podprostorů, obsahujících množinu M. Jinými slovy, $\operatorname{span}(M)$ je (co do inkluze) nejmenší podprostor obsahující M.

(a) Ano. Množina $\mathrm{span}(M)$ je již podprostor, tudíž jeho lineární obal je on sám.

(b) Ano. Pokud podprostor U obsahuje množinu N, pak obsahuje i množinu M. Tudíž při konstrukci lineárního obalu $\mathrm{span}(M)$ děláme průnik z týchž podprostorů, jako při konstrukci $\mathrm{span}(N)$, plus případně ještě z nějakých navíc. Proto $\mathrm{span}(M) \Subset \mathrm{span}(N)$.

(c) Tento vztah obecně neplatí. Vezměme například množiny $M = V$ a $N = M \setminus \{o\}$. Platí, že $\mathrm{span}(M) = \mathrm{span}(N)$, tím pádem i $\mathrm{span}(M) \Subset \mathrm{span}(N)$, ale zároveň neplatí $M \subseteq N$.

Druhý způsob. Zde vycházíme z tvrzení, že $x \in \mathrm{span}(M)$ právě tehdy, pokud existuje $k \in \mathbb{N}$, vektory $x_1, \ldots, x_k \in M$ a koeficienty $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ takové, že

$$x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i.$$

(a) Ukážeme nejprve, že $\mathrm{span}(M) \Subset \mathrm{span}(\mathrm{span}(M))$, tedy že

$$x \in \mathrm{span}(M) \quad \Rightarrow \quad x \in \mathrm{span}(\mathrm{span}(M)).$$

Protože $x \in \mathrm{span}(M)$, dá se vyjádřit jako $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$ pro $x_i \in M$. Protože ale $x_i \in \mathrm{span}(M)$ a platí $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$, dostáváme z tvrzení výše, že $x \in \mathrm{span}(\mathrm{span}(M))$.

Naopak pokud $x \in \mathrm{span}(\mathrm{span}(M))$, poté existují $x_1, \ldots, x_k \in \mathrm{span}(M)$ a $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ takové, že $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$. Každé $x_i \in \mathrm{span}(M)$ můžeme vyjádřit jako $x_i = \sum_{j=1}^{\ell_i} \beta_{ij} y_{ij}$ pro jisté $y_{ij} \in M$. Po dosazení dostáváme

$$x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{\ell_i} \beta_{ij} y_{ij} \right) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\ell_i} (\alpha_i \beta_{ij}) y_{ij}.$$

Toto je lineární kombinace vektorů $y_{ij} \in M$ s koeficienty $\alpha_i \beta_{ij}$, tedy $x \in \mathrm{span}(M)$.

(b) Každý vektor $x \in \mathrm{span}(M)$ můžeme vyjádřit jako $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$ pro určité $x_i \in M$ a $k \in \mathbb{N}$. Protože $M \subseteq N$, platí také, že $x_i \in N$, tedy $x \in \mathrm{span}(N)$.

(c) Již jsme nahlédli protipříkladem v první části.

Cv. 8.4 Rozhodněte, zda vektory $(1, 2)^T$ a $(3, 4)^T$ generují $\mathbb{R}^2$.

Řešení:

Aby dané vektory generovaly $\mathbb{R}^2$, musí jít každý vektor $(a, b)^T \in \mathbb{R}^2$ vyjádřit jako jejich lineární kombinace, tj.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Pokud rovnost vektorů rozepíšeme po složkách, dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} \alpha + 3\beta &= a \\ 2\alpha + 4\beta &= b, \end{aligned}$$

kde α, β jsou neznámé. Maticově můžeme soustavu přepsat a vyřešit jako

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & a \\ 2 & 4 & b \end{array}\right).$$

Protože je matice soustavy regulární, má soustava jediné řešení pro jakékoli hodnoty $a, b \in \mathbb{R}$. Každý vektor lze tedy pomocí zadané dvojice jednoznačně generovat. K tomuto závěru nepotřebujeme znát přesný tvar řešení soustavy. Na druhou stranu, řešení soustavy nám dává dodatečnou informaci, a to koeficienty příslušné lineární kombinace. V našem případě je řešení $\alpha = -(2a + \frac{3b}{2})$, $\beta = \frac{2a-b}{2}$.

Cv. 8.5 Rozhodněte, zda existuje lineární kombinace zadaných vektorů dávající vektor $x = (1, 2, 3)^T$ a pokud ano, tak ji najděte: $(2, 1, 3)^T, (3, 1, 2)^T, (1, 1, 1)^T$.

Řešení:

K řešení využijeme postupu z předchozí úlohy, tedy převedení problému hledání koeficientů lineární kombinace na řešení soustavy lineárních rovnic.

Dostáváme soustavu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right),$$

která má jednoznačné řešení, protože ji můžeme převést Gaussovou eliminací například na tvar

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{array}\right).$$

Řešením je vektor $(1, -1, 2)^T$, tedy platí, že

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$