5. Regulární a inverzní matice, grupy

Cv. 5.1 Invertujte matice elementárních řádkových úprav.

Řešení:

Ukážeme dva postupy.

1) První způsob je pomocí G-J eliminace převodem $(A \mid I_n)$ na $(I_n \mid A^{-1})$. Matici $E_i(\alpha)$ invertujeme takto:

$$
(E_i(\alpha) \mid I_n) = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
0 & \ddots & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \alpha & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1
\end{array}\right) \sim
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
0 & \ddots & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & 1/\alpha & \ddots & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1
\end{array}\right) = (I_n \mid E_i(\alpha^{-1})).
$$

Matici $E_{ij}(\alpha)$ invertujeme takto:

$$
(E_{ij}(\alpha) \mid I_n) = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
 & \ddots & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\
 & & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\
 & \alpha & & \ddots & 0 & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\
 & & & & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1
\end{array}\right) \sim
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
0 & \ddots & \ddots & & \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots & & & 1 & \ddots & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & 0 & & -\alpha & & \ddots & 0 \\
0 & \dots & \dots & 0 & 1 & & & & & 1
\end{array}\right) = (I_n \mid E_{ij}(-\alpha)).
$$

Matici E_{ij} invertujeme takto:

$$
(E_{ij} \mid I_n) = \left(\begin{array}{cc|cc}
0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right) \sim
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{cc|cc}
1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0
\end{array}\right) = (I_n \mid E_{ij}).
$$

Tudíž $E_i(\alpha)^{-1} = E_i(\alpha^{-1})$, $E_{ij}(\alpha)^{-1} = E_{ij}(-\alpha)$ a $E_{ij}^{-1} = E_{ij}$.

2) Druhý způsob je využitím významu matic elementárních úprav. Matice $E_i(\alpha)$ násobí i-tý řádek číslem $\alpha \neq 0$. Inverzní operace je vydělení i-tého řádku číslem α, což je reprezentováno maticí $E_i(\alpha^{-1})$. Zkouška $E_i(\alpha)E_i(\alpha^{-1}) = I$ pak skutečně ověří, že se jedná o inverzní matici.

Matice $E_{ij}(\alpha)$ přičte α-násobek j-tého řádku k i-tému. Inverzní operace je odečtení α-násobku j-tého řádku od i-tého, což je representováno maticí $E_{ij}(-\alpha)$. Zkouška opět ověří, že se jedná o inverzní matici.

Matice E_{ij} prohazuje i-tý a j-tý řádek. Inverzní operace je tatéž, výměna i-tého a j-tého řádku. Tudíž matice E_{ij} je inverzní sama k sobě.

Cv. 5.2 Upravte následující výraz. $(I - B^TA^{-1})A + (B^TB)^TA^{-1}$

Řešení: S využitím základních vlastností maticového součinu, transpozice a inverze odvodíme

$$
\begin{aligned}
&(I - B^TA^{-1})A + (B^TB)^TA^{-1} \\
&\qquad = IA - B^TA^{-1}A + (B^TB)^TA^{-1} \quad &&\text{[distributivita]} \\
&\qquad = IA - B^TI + (B^TB)^TA^{-1} &&\text{[definice inverze]} \\
&\qquad = A - B^T + (B^TB)^TA^{-1} &&\text{[násobení maticí } I\text{]} \\
&\qquad = A - B^T + B^TBA^{-1}. &&\text{[transpozice součinu matic]}
\end{aligned}
$$

Cv. 5.3 Mějme blokovou matici $\begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & C \end{pmatrix}$ s bloky $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(a) Rozhodněte, kdy je regulární.

(b) Určete inverzi, pokud $B = 0_n$.

Řešení:

(a) Regularitu můžeme otestovat Gaussovou eliminací převodem do odstupňovaného tvaru. Uvědomme si, že při eliminaci řádků odpovídajících matici A nijak neupravujeme řádky odpovídající C a naopak. Regularita matice je proto podmíněna regularitou bloku C, v opačném případě bychom dostali nulový řádek. Pokud je blok C regulární, jsme schopni matici převést do tvaru

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & C \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}.$$

Tedy pokud by nebyl blok A regulární, mohli bychom z tohoto tvaru získat Gaussovou eliminací nulový řádek. Regularita bloků A, C je tedy nutnou podmínkou regularity matice.

Zároveň regularita A, C zajišťuje, že můžeme převést matici do tvaru

$$\begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix},$$

což je redukovaný odstupňovaný tvar původní matice s plnou hodností. Regularita bloků A, C je tedy jak nutnou, tak i postačující podmínkou regularity.

(b) Pro výpočet inverze můžeme blokově zapsat rozšířenou soustavu jako

$$\left(\begin{matrix} A & 0_n \\ 0_n & C \end{matrix}\;\middle|\;\begin{matrix} I_n & 0_n \\ 0_n & I_n \end{matrix}\right).$$

Podobně jako v předchozím podúloze se při G-J eliminaci budou upravovat řádky odpovídající blokům A a C nezávisle na sobě. Při převodu $\begin{pmatrix} A & 0_n \mid I_n & 0_n \end{pmatrix}$ se nulové bloky 0_n po celou dobu výpočtu nebudou měnit a nebude na nich záviset ani podoba eliminace. Na konci eliminace proto dostaneme $\begin{pmatrix} I_n & 0_n \mid A^{-1} & 0_n \end{pmatrix}$. Obdobný průběh bude mít i výpočet na podmatici $\begin{pmatrix} 0_n & C \mid 0_n & I_n \end{pmatrix}$. Inverzní matice má proto tvar

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & 0_n \\ 0_n & C^{-1} \end{pmatrix}.$$

Grupy

Cv. 5.4 Zjistěte, zda je (Abelovou) grupou:

(a) $(\mathbb{Q}, +)$,

(b) $(\mathbb{Q}, -)$,

(c) množina posunutí v $\mathbb{R}^2$ s operací skládání zobrazení.

<u>Řešení:</u>

(a) $(\mathbb{Q}, +)$ je Abelovou grupou:
- sčítání je komutativní i asociativní operace,
- neutrální prvek je 0
- k racionálnímu číslu q je inverzní prvek $-q$.

(b) $(\mathbb{Q}, -)$ není grupou, protože rozdíl racionálních čísel není asociativní operace. Například $(8-6)-1 = 1 \neq 3 = 8-(6-1)$.

(c) Množina posunutí v $\mathbb{R}^2$ je Abelovou grupou. Asociativita plyne z asociativity skládání zobrazení a komutativita z komutativity sčítání vektorů. Neutrálním prvkem je identické zobrazení $e((x_1,x_2)^T) = (x_1,x_2)^T$ (tj. posunutí vektorem $(0,0)^T$) a inverzím prvkem k posunutí $t((x_1,x_2)^T) = (x_1,x_2)^T + (a,b)^T$ je posunutí $t^{-1}((x_1,x_2)^T) = (x_1,x_2)^T - (a,b)^T$.

Cv. 5.5 Vyplňte tabulku pro binární operaci $\circ$ na G tak aby $(G,\circ)$ byla grupou s neutrálním prvkem 0. Výsledek zdůvodněte.

(a)

$\circ$	0	1	2
0			
1			
2			

(b)

∘	0	1	2	3
0				
1		0		
2				
3				

Řešení:
Všechny tabulky až na poslední jsou určeny jednoznačně. Fakt, že 0 je neutrálním prvkem pro ∘ určuje první řádek i sloupec tabulky. Existence levé i pravé inverze omezuje pozice 0 na diagonále nebo symetricky podle diagonály. Asociativita vynutí zbylé pozice. Dostáváme:

(a)

∘	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

… aditivní grupa modulo 3, tj. $(\mathbb{Z}_3, +)$

(b)

∘	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

, anebo

∘	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	1	0
3	3	2	0	1

.