4. Operace s maticemi, regulární a inverzní matice

Cv. 4.1 Dokažte pro $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ z definice:

(a) $(A+B)^T = A^T + B^T$,

(b) $(AB)^T = B^T A^T$.

Řešení:

Rovnost $X = Y$ dvojice matic $X, Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$ platí, pokud si jsou rovny všechny jejich prvky. Ve všech podúlohách proto otestujeme pro libovolnou dvojici indexů i, j rovnost $X_{ij} = Y_{ij}$.

(a) Z definice transpozice a sčítání matic vyjádříme

$$((A+B)^T)_{ij} = (A+B)_{ji} = A_{ji} + B_{ji}$$

a

$$(A^T + B^T)_{ij} = (A^T)_{ij} + (B^T)_{ij} = A_{ji} + B_{ji}.$$

(b) Z definice transpozice a násobení matic vyjádříme

$$((AB)^T)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^{n} A_{jk} B_{ki}$$

a

$$(B^T A^T)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} B^T_{ik} A^T_{kj} = \sum_{k=1}^{n} B_{ki} A_{jk} = \sum_{k=1}^{n} A_{jk} B_{ki},$$

kde poslední rovnost platí díky komutativnosti násobení reálných čísel.

Cv. 4.2 Dokažte:

(a) $(ABC)^T = C^T B^T A^T$,

(b) $A^T A$ je symetrická matice pro každé $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Řešení:

(a) Z přednášky víme, že $(AB)^T = B^T A^T$. Tuto vlastnost využijeme dvakrát a vyjádříme
$$((AB)C)^T = C^T (AB)^T = C^T B^T A^T.$$

(b) Matice M je symetrická, pokud $M^T = M$. Ověříme tedy tuto vlastnost pro matici $M = A^T A$. Odvodíme $M^T = (A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A = M$, což dokazuje požadovanou symetrii.

Cv. 4.3 Spočtěte hodnost následujících matic.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$,

(b) $A = ab^T$, kde $a, b \in \mathbb{R}^n$.

Řešení:

(a) K výpočtu hodnosti je možné využít Gaussovu eliminaci. Vidíme, že druhý řádek je fakticky 3-násobek prvního. Proto po jednom kroku eliminace, kdy přičteme (-3)-násobek prvního řádku k druhému dostáváme matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ta je již v REF tvaru a její hodnost je 1.

(b) Pro určení hodnosti matice je dobré si uvědomit, jak matice vypadá. Platí, že $(ab^T)_{ij} = a_i b_j$, explicitně

$$\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \dots & a_2b_n \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & \dots & a_3b_n \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & a_nb_3 & \dots & a_nb_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} — & a_1b^T & — \\ — & a_2b^T & — \\ — & a_3b^T & — \\ & \vdots & \\ — & a_nb^T & — \end{pmatrix}.$$

Řádky matice ab^T jsou jen násobky vektoru b^T. Mohou tedy nastat pouze dvě situace. Pokud $a = 0$ nebo $b = 0$, triviálně $\operatorname{rank}(ab^T) = 0$. V opačném případě existuje aspoň jedno $a_i \neq 0$ a všechny řádky matice jsou násobky i-tého řádku. Podobně jako v předchozí úloze je tedy $\operatorname{rank}(ab^T) = 1$.

Cv. 4.4 Otestujte regularitu matice: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení:

Regularitu matice můžeme otestovat pomocí hodnosti matice. Převedeme matici na odstupňovaný tvar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

Matice má plnou hodnost, tedy je regulární.

Cv. 4.5 Rozhodněte, kdy je trojúhelníková matice regulární.

Řešení:

Horní trojúhelníková matice je již (skoro) v odstupňovaném tvaru. Pokud jsou diagonální prvky nenulové, pak to jsou pivoty a matice je regulární. Pokud alespoň jeden diagonální prvek je nulový, pak v příslušném sloupci není pivot, a tím pádem je matice singulární.

Pro dolní trojúhelníkovou matici je situace podobná. Matici transponujeme a převedeme tím na předchozí případ.

Cv. 4.6 Najděte inverzní matici k maticím

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 10 \end{pmatrix}$

Řešení:

Ve všech třech případech využijeme algoritmu, kdy pomocí Gaussovy–Jordanovy (G-J) eliminace převedeme matici $(A \mid I_n)$ na tvar $(I_n \mid A^{-1})$.

(a) Pomocí G-J eliminace dostáváme

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right)$$

(b) Pomocí G-J eliminace dostáváme

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$