3. Operace s maticemi

Cv. 3.1 Spočtěte následující výrazy:

(a) $2A$,
(b) $A+B$,
(c) C^T,
(d) Cv,
(e) BC,

kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

(a) Pokud matice A je řádu $m \times n$ výsledná matice bude také řádu $m \times n$. Výslednou matici získáme tak, že každou složku matice A násobíme příslušnou konstantou (tj. hodnotou 2). Dostáváme:

$$2A = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 2 \\ 2\cdot 2 & 2\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

(b) Abychom mohli sečíst matice A, B musí mít shodné rozměry (všimněme si, že obě jsou shodného řádu 2×2). Výsledná matice bude mít stejné rozměry jako matice A (resp. B), tedy 2×2. Výsledek získáme sčítáním po složkách, tj. každá pozice výsledné matice je součtem hodnot z matice A a B na dané pozici. Dostáváme:

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+(-1) & 2+(-1) \\ 2+0 & -1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Je-li původní matice rozměrů $m \times n$, transponovaná matice bude mít rozměry $n\times m$. Její prvek na pozici (i,j) je pak roven prvku, který je v původní matici na pozici (j,i). Proto získáváme:

$$C^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Je-li matice C řádu $m\times n$, musí v být n-složkový vektor a výsledkem bude m složkový vektor. V tomto případě je matice C řádu 2×3 a vektor v má 3 složky (řády tedy souhlasí) a výsledkem bude 2-složkový vektor. Výsledný vektor spočteme následovně:

$$Cv = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 + 0\cdot 2 + 1\cdot 3 \\ 2\cdot 1 + (-2)\cdot 2 + 0\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Na násobení jsme mohli také pohlížet jako na násobení matice C řádu 2×3 s maticí odpovídající vektoru v řádu 3×1.

(e) Je-li matice B řádu $m \times n$ musí být matice C řádu $n \times \ell$ a výsledná matice bude řádu $m \times \ell$. V tomto případě je matice B řádu 2×2 a matice C řádu 2×3 (tedy řády souhlasí) a výsledná matice bude řádu 2×3. Výslednou matici spočteme následovně:

$$\begin{aligned} BC &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1)\cdot 3 + (-1)\cdot 2 & (-1)\cdot 0 + (-1)\cdot(-2) & (-1)\cdot 1 + (-1)\cdot 0 \\ 0\cdot 3 + 3\cdot 2 & 0\cdot 0 + 3\cdot(-2) & 0\cdot 1 + 3\cdot 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Cv. 3.2 Mějme A, b definované jako

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ověřte pomocí maticového násobení, zda jsou vektory $x = (0,1,2)^T$, $y = (0,-1,2)^T$ řešením soustavy $Ax = b$.

Řešení:
Násobením Ax dostáváme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 1\cdot 1 + 2\cdot 2 \\ 1\cdot 0 + 1\cdot 1 + 1\cdot 2 \\ 2\cdot 0 + 2\cdot 1 + 0\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Násobením Ay dostáváme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 1\cdot(-1) + 2\cdot 2 \\ 1\cdot 0 + 1\cdot(-1) + 1\cdot 2 \\ 2\cdot 0 + 2\cdot(-1) + 0\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Vektor x tedy řešením soustavy není, zatímco vektor y ano.