2. Soustavy lineárních rovnic

Cv. 2.1 Zapište rozšířenou matici soustavy

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 6, \\ -3x_1 + x_2 &= 2, \end{aligned}$$

a vyřešte soustavu Gaussovou nebo Gaussovou–Jordanovou eliminací.

Znázorněte řešení soustavy graficky jako průsečík přímek (tzv. řádkový pohled). Dále vyjádřete pravou stranu soustavy jako kombinaci sloupců matice soustavy (tzv. sloupcový pohled).

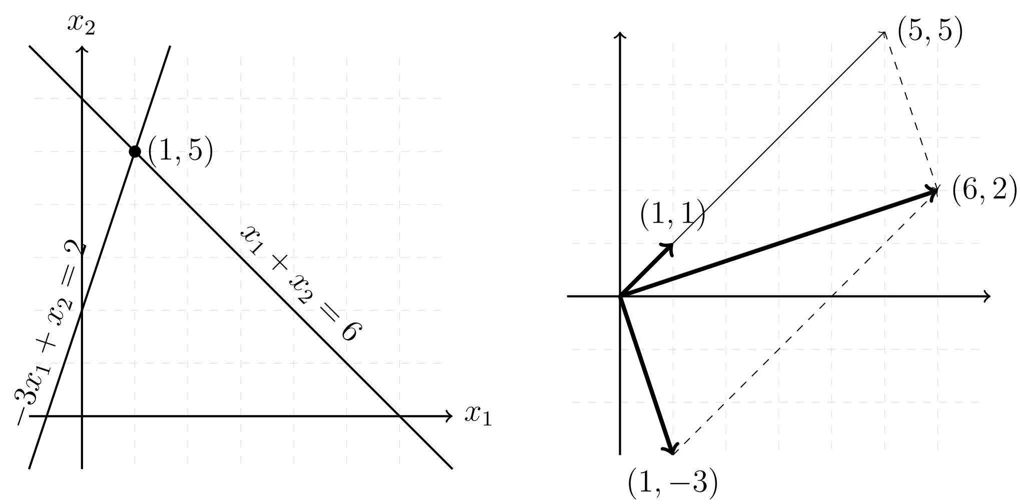
Řešení:

Rozšířená matice soustavy je

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 6 \\ -3 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Aplikací elementárních řádkových úprav snadno nalezneme řešení $(x_1, x_2) = (1, 5)$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 6 \\ -3 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & 20 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right).$$



Rovnice $x_1 + x_2 = 6$ a $-3x_1 + x_2 = 2$ popisují dvě přímky v rovině, řešení soustavy $(1, 5)$ je jejich průsečíkem.

Sloupce rozšířené matice soustavy můžeme zakreslit jako vektory v rovině. Řešení soustavy pak říká, že vektor pravých stran $(6, 2)$ dostaneme sečtením (1-krát prodlouženého) vektoru $(1, -3)$ a 5-krát prodlouženého vektoru $(1, 1)$.

Cv. 2.2 Vyřešte Gaussovou–Jordanovou eliminací následující soustavu rovnic a určete hodnost matic. Na závěr udělejte zkoušku řešení.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right).$$

Řešení:
Aplikací elementárních úprav převedeme matici na tvar:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Nyní použijeme zpětnou substituci. Z druhého řádku vyjádříme $x_2 = 3 - 2x_3$, přičemž volnou proměnnou x_3 ponecháme jako parametr. Nakonec z prvního řádku dostaneme $x_1 = 1 + x_3$. Soustava má tedy nekonečně mnoho řešení ve tvaru

$$(x_1, x_2, x_3) = (1 + x_3,\ 3 - 2x_3,\ x_3) = (1, 3, 0) + x_3 \cdot (1, -2, 1).$$

Geometricky množina řešení tvoří přímku, která prochází bodem $(1, 3, 0)$ a má směrnici $(1, -2, 1)$.

V tomto případě opět platí $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A \mid b) = 2$, ale zároveň je $\operatorname{rank}(A)$ menší než počet proměnných.

Dosazením například pro $x_3 = 0$ a $x_3 = 1$ ověříme, že vektory $(1, 3, 0)$ a $(2, 1, 1)$ vyhovují soustavě, a tím pádem jí vyhovují všechny na přímce (opět tím ale neověříme, zda neexistuje nějaké ještě jiné řešení).

Cv. 2.3 Kolik existuje různých odstupňovaných tvarů pro matice 2×3 (bez ohledu na konkrétní hodnoty prvků)? Poznámka: tvar matice $\mathrm{REF}(A)$ je jednoznačně určen pozicí jejich pivotů.

Řešení:
Různé odstupňované tvary se odlišují počtem a pozicí pivotů. Matice 3×4 v odstupňovaném tvaru může mít 0 až 2 pivoty (v každém řádku a sloupci nanejvýš 1). Pro matici hodnosti r se pivoty vždy nachází postupně v prvních r řádcích odstupňovaného tvaru, stačí proto uvažovat umístění pivotů do různých sloupců. Pro matici 2×3 můžeme najít následujících 7 různých odstupňovaných tvarů:

- jeden odstupňovaný tvar s 0 pivoty (nulová matice):

$$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right),$$

- 3 odstupňované tvary s 1 pivotem:

$$\left(\begin{smallmatrix} \bullet & - & - \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & \bullet & - \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right),$$

- 3 odstupňované tvary se 2 pivoty:

$$\left(\begin{smallmatrix} \bullet & - & - \\ 0 & \bullet & - \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} \bullet & - & - \\ 0 & 0 & \bullet \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & \bullet & - \\ 0 & 0 & \bullet \end{smallmatrix}\right).$$

Cv. 2.4 Nechť matice A je v odstupňovaném (tj. REF) tvaru. Diskutujte, které podmatice A jsou také v REF a které už být nemusí.

Řešení:
Z matice A můžeme odstranit libovolný řádek nebo více řádků a podmínky na

REF tvar zůstanou zachovány, čili tato operace zachovává vlastnost být v odstupňovaném tvaru.

Libovolný sloupec vynechat nemůžeme, například odstraněním prvního sloupce z matice $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ dostaneme matici, která v REF tvaru není. Můžeme ale odstranit jakékoli nebázické sloupce (tj. ty bez pivota) a také libovolné sloupce zprava.

Cv. 2.5 Vyřešte soustavu lineárních rovnic $n \times n$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ -1 & \dots & -1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Řešení:

V zásadě aplikujeme standardní postup Gaussovy eliminace, i když u těchto typů příkladů je občas výhodnější k odstupňovanému tvaru matice dospět jinou sérií elementárních úprav.

Nejprve přičteme první řádek ke všem ostatním:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \ddots & & \vdots & 1 \\ -1 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & 2 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & -1 & \dots & -1 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Nyní druhý řádek přičteme ke všem, co se nachází pod ním:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & 2 \\ 0 & -1 & 1 & \ddots & \vdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & -1 & \dots & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Tento postup opakujeme, dokud nedospějeme k matici v odstupňovaném tvaru:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2^{n-1} \end{array}\right).$$

Z pravé strany matice vyčteme řešení $x = (x_1, \dots, x_n) = (1, 2, 4, \dots, 2^{n-1})$.

Tento příklad ilustruje ještě jednu vlastnost Gaussovy eliminace a obecně řešení soustav rovnic. Vstupní hodnoty jsou malá celá čísla, pouze 0, 1 a -1. Nicméně během úprav matice, stejně jako na výstupu jako řešení, jsme dostali některá čísla exponenciálně velká (konkrétně 2^{n-1}). S touto vlastností musíme počítat mj. při návrhu a implementaci numerických metod na řešení (potenciálně hodně velkých) soustav rovnic. Velká čísla nebo čísla velmi blízko nuly totiž zhoršují numerické vlastnosti řešení (zaokrouhlovací chyby během výpočtu mohou narůstat).

Cv. 2.6 Vyřešte soustavu lineárních rovnic s parametrem $a \in \mathbb{R}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right).$$

Řešení:

Pomocí Gaussovy eliminace převedeme matici na odstupňovaný tvar:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 1-a \end{array}\right)$$

Hodnota v matici na pozici $(3,3)$ je $2-a-a^2 = (1-a)(a+2)$ a v závislosti na hodnotě parametru a může být někdy nulová. Proto musíme provést následující rozbor případů:

- „Případ $a = -2$." Poslední řádek odpovídá rovnici $(1-a)(a+2)x_3 = 1-a$, neboli $0 \cdot x_3 = 3$. V tomto případě řešení neexistuje.
- „Případ $a = 1$." Poslední řádek odpovídá rovnici $(1-a)(a+2)x_3 = 1-a$, neboli $0 \cdot x_3 = 0$. Předchozí řádek je také nulový. Tudíž zbývá jediná rovnice, a to první, která má tvar $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. V tomto případě je množina řešení nekonečná a je tvaru

$$(1 - x_2 - x_3,\ x_2,\ x_3), \quad \text{kde } x_2, x_3 \in \mathbb{R}.$$

- „Případ $a \notin \{-2, 1\}$." Nyní je hodnota v matici na pozici $(3,3)$ nenulová a jedná se o pivota. Zpětnou substitucí tedy dopočítáme jednoznačné řešení

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\tfrac{1}{a+2},\ \tfrac{1}{a+2},\ \tfrac{1}{a+2}\right).$$