

Doporučené příklady k Teorii množin, LS 2024/2025

1. přednáška, 19. 2. 2025

1. Napište „množina x je prázdná“ (přesněji „množina x nemá žádné prvky“) formulí základního jazyka teorie množin.

2. přednáška, 26. 2. 2025

2. Dokažte $((x \subseteq y) \wedge (y \subset z)) \rightarrow x \subset z$.
3. Napište „množina x je jednoprvková“ formulí základního jazyka teorie množin.
4. Dokažte, že „množina všech množin“ neexistuje (s využitím axiomu vydělení).
5. Dokažte $(\forall z)(x \in z \leftrightarrow y \in z) \rightarrow x = y$ (s využitím axiomu dvojice).
6. Rozepište trojici (a, b, c) jako množinu jen pomocí složených závorek.
7. Nechť a je libovolná množina. Co lze říct o množinách
 - (a) $\bigcup \mathcal{P}(a)$,
 - (b) $\mathcal{P}(\bigcup a)$?

3. přednáška, 5. 3. 2025

8. Ukažte, že axiom fundovanosti (spolu s ostatními axiomy) zakazuje existenci množin, které jsou prvky sama sebe, a obecněji existenci konečných cyklů v relaci náležení (tj. množin y_1, y_2, \dots, y_n takových, že $y_1 \in y_2 \wedge y_2 \in y_3 \wedge \dots \wedge y_{n-1} \in y_n \wedge y_n \in y_1$).
9. Předpokládejme, že A, B jsou třídivé proměnné zastupující třídivé termy $\{x; \varphi(x)\}, \{y; \psi(y)\}$, kde $\varphi(x), \psi(x)$ jsou formule základního jazyka teorie množin. Rozepište formuli $A \subset B$ v základním jazyce teorie množin.
10. Předpokládejme, že a je neprázdná množina. Musí být $\bigcap a$ množina?
11. Rozhodněte, zda pro univerzální třídu V platí $\mathcal{P}(V) = V$.

4. přednáška, 12. 3. 2025

12. Ukažte, že pro třídu X obecně neplatí $X \times X^2 = X^3$ (zvolte např. $X = \{\emptyset\}$).
13. Ověřte, že pro libovolnou relaci R a relaci identity Id je $R \circ \text{Id} = \text{Id} \circ R = R$.
14. Ověřte, že pro libovolné množiny x, y a relaci náležení E platí

$$(x, y) \in E \circ E \leftrightarrow x \in \bigcup y.$$

15. Ověřte, že pro každou neprázdnou množinu x a neprázdnou třídu Y platí

$$\bigcup \bigcup \bigcup^x Y = x \cup Y.$$

5. přednáška, 19. 3. 2025

16. Napište definici „uspořádání R na třídě A je *dobré*“ jako formuli (s využitím zavedených zkratk a rozšíření jazyka).
17. Najděte nějaké množiny x , na nichž je relace náležení ostré uspořádání, a navíc uspořádání $E \cup \text{Id}$ je na x dobré.

6. přednáška, 28. 3. 2025

18. Uvažujme potenční množinu $\mathcal{P}(x)$ množiny x uspořádanou relací \subseteq . Ověřte, že pro každou podmnožinu $A \subseteq \mathcal{P}(x)$ platí $\sup_{\subseteq} A = \bigcup A$.
19. Pokuste se rozmyslet si, jak by se „grafově“ dokazovalo, že existence zobrazení f množiny x na množinu y a zobrazení g množiny y na množinu x implikuje existenci bijekce mezi x a y . Můžete předpokládat, že máte k dispozici přirozená čísla s aritmetikou. Proč nepůjde hledaná bijekce obecně vyjádřit jako množina?
20. Dokažte, že každá neklesající funkce z $[0, 1]$ do $[0, 1]$ (ne nutně spojitá) má pevný bod. Můžete napodobit důkaz lemmatu o monotónním zobrazení na potenční množině.
21. Ověřte, že funkce $g : \omega \times \omega \rightarrow \omega$ definovaná jako $g((m, n)) = 2^m \cdot 3^n$ je prostá, a že funkce $h : \omega \times \omega \rightarrow \omega$ definovaná jako $h((m, n)) = 2^m \cdot (2n + 1) - 1$ je bijekce mezi $\omega \times \omega$ a ω . (Symbolem ω označujeme množinu $\{0, 1, 2, \dots\}$. Přirozená čísla a operace s nimi chápeme zatím intuitivně.)
22. Pomocí Cantorovy–Bernsteinovy věty pro „intuitivně“ chápané množiny \mathbb{N} a \mathbb{Q} dokažte, že $\mathbb{N} \approx \mathbb{Q}$. (Racionální čísla např. můžeme reprezentovat jako celočíselné zlomky v základním tvaru).

23. Pomocí Cantorovy–Bernsteinovy věty dokažte, že úsečka $[0, 1]$ a čtverec $[0, 1] \times [0, 1]$ mají stejnou mohutnost. Využijte např. desetinný rozvoj reálných čísel (která zatím chápeme intuitivně).
24. Pokuste se definovat „ x je konečná množina“ (aspoň dvěma různými způsoby; např. pomocí uspořádání nebo zobrazení).

7. přednáška, 2. 4. 2025

25. Napište formuli pro $\text{Fin}(x)$ podle Tarského definice konečnosti (každá neprázdná podmnožina $\mathcal{P}(x)$ má maximální prvek vzhledem k inkluzi).
26. Ověřte, že v každé lineárně uspořádané množině jsou každé dvě její dolní podmnožiny porovnatelné inkluzí.
27. Necht' R je lineární uspořádání na množině A , S je lineární uspořádání na množině B a F, G jsou počátková vnoření z A do B vzhledem k R a S . Musí nutně platit $F \subseteq G$ nebo $G \subseteq F$?
28. Ověřte, že je-li R třída zobrazení lineárně uspořádaná inkluzí (tedy tvoří řetězec vzhledem k \subseteq), pak $\bigcup R$ je opět zobrazení.
29. Ověřte, že v každé uspořádané množině je sjednocení systému libovolně mnoha dolních množin dolní množina.

8. přednáška, 9. 4. 2025

30. Ověřte jednoznačnost ve větě o porovnávání dobrých uspořádání: tedy pokud A a B jsou dobře uspořádané množiny, pak zobrazení F , které je izomorfismem A a dolní množiny B nebo izomorfismem dolní množiny A a B , je určeno jednoznačně.
31. Dokažte, že pro každou konečnou množinu x a každé zobrazení f s definičním oborem x platí $\text{Rng}(f) \preceq x$. Můžete použít např. princip indukce pro konečné množiny.
32. Dokažte, že každou konečnou množinu x lze dobře uspořádat. Můžete opět postupovat indukcí pro konečné množiny.

9. přednáška, 16. 4. 2025

33. Dokažte, že množina ω všech přirozených čísel (a obecně každá induktivní množina) je dedekindovsky nekonečná. (Např. stačí ukázat, že funkce následníka je prostá, ale jejím oborem hodnot není celá ω .)

10. přednáška, 23. 4. 2025

34. Dokažte princip silné indukce pro přirozená čísla: Je-li $X \subseteq \omega$ podmnožina splňující 1) $0 \in X$ a 2) $(\forall n \in \omega)(n \subseteq X \rightarrow n \in X)$, pak $X = \omega$. Můžete využít, že náležení je dobré ostré uspořádání na ω .
35. Dokažte, že pro každé zobrazení f s definičním oborem ω platí $\text{Rng}(f) \preccurlyeq \omega$. Využijte existence dobrého uspořádání na ω .
36. Nechť A je nespočetná, B spočetná a C konečná množina. Dokažte, že množiny $A \cup C$ a $A - C$ jsou nespočetné, zatímco $B \cup C$ a $B - C$ jsou spočetné.
37. Ověřte, že lexikografické uspořádání na množině $\omega \times \omega$ je dobré (ostré).
38. Ověřte, že lexikografické uspořádání na množině $\omega \times 2$ je izomorfní s uspořádáním \in na množině ω .
39. Ověřte, že lexikografické uspořádání na množině $2 \times \omega$ není izomorfní s uspořádáním \in na množině ω .
40. Ověřte, že maximo-lexikografické uspořádání na množině $\omega \times \omega$ je izomorfní s uspořádáním \in na množině ω .

11. přednáška, 30. 4. 2025

41. (Pokrytí racionálních čísel intervaly)
Nechť $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ je množina všech racionálních čísel mezi 0 a 1. Je-li $I = (a, b)$ otevřený interval, jeho délku definujeme jako $d(I) = b - a$.
 - (a) Dokažte (indukcí), že pokud $n \in \mathbb{N}$ a I_1, I_2, \dots, I_n jsou otevřené intervaly splňující $A \subset \bigcup_{k=1}^n I_k$, pak pro součet jejich délek platí

$$\sum_{k=1}^n d(I_k) \geq 1.$$

Využijte hustoty \mathbb{Q} , tj. mezi každými dvěma různými reálnými čísly je aspoň jedno racionální.

- (b) Dokažte, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje nekonečná posloupnost otevřených intervalů I_1, I_2, \dots taková že $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ a

$$\sum_{i=1}^{\infty} d(I_k) < \varepsilon.$$

Využijte spočetnosti množiny \mathbb{Q} .

12. přednáška, 7. 5. 2025

42. Ukažte, že následující dvě definice spojitosti funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ v bodě a jsou ekvivalentní:

(a) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)(x \in (a - \delta, a + \delta) \rightarrow f(x) \in (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon))$

(b) Je-li (a_1, a_2, \dots) posloupnost splňující $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a).$$

V důkaze implikace (b) \Rightarrow (a) najděte krok, kde využíváte axiom výběru.

43. Ověřte, že sjednocení libovolného řetězce prostých zobrazení (vzhledem k inkluzi) je prosté zobrazení.

44. Pomocí principu maximality dokažte: je-li (A, \leq) uspořádaná množina, pak pro každý řetězec $B \subseteq A$ existuje řetězec C splňující $B \subseteq C \subseteq A$, který je maximální v inkluzi.

45. Dokažte, že princip maximality je ekvivalentní variantě principu maximality, kde se předpokládá, že každý řetězec má supremum (místo pouhé horní meze).

13. přednáška, 14. 5. 2025

46. Odvoďte princip dobrého uspořádání z principu maximality. (Uvažujte dobrá uspořádání na podmnožinách a porovnejte je relací „rozšiřování“.)

47. Dokažte, že třída X je tranzitivní právě tehdy, když $\bigcup X \subseteq X$.

48. Dokažte, že je-li X tranzitivní třída, pak náležení je tranzitivní na X právě tehdy, když každý prvek $x \in X$ je tranzitivní množina.

49. Dokažte, že je-li X tranzitivní vlastní třída, dobře ostře uspořádaná náležením, pak $X = \mathbf{On}$.

50. Uvažujme potenční třídu $\mathcal{P}(X)$ třídy X uspořádanou relací \subseteq . Ověřte, že pro každou neprázdnou část $A \subseteq \mathcal{P}(X)$ platí $\inf_{\subseteq} A = \bigcap A$, a podobně pro každou podmnožinu $a \subseteq \mathcal{P}(X)$ platí $\sup_{\subseteq} a = \bigcup a$.

51. Dokažte, že $\omega = \sup_{<} \omega$ v uspořádání $(\mathbf{On}, <)$. (Hlavní krok je odvození identity $\bigcup \omega = \omega$).

Bonusová otázka

52. * Existuje nespočetný ordinál? Pokud ano, lze jeho existenci dokázat v ZF, tj. bez axiomu výběru?