

Doporučené příklady k Teorii množin, LS 2018/2019

1. přednáška, 21. 2. 2019

1. Napište „množina x je prázdná“ (přesněji „množina x nemá žádné prvky“) formulí základního jazyka teorie množin.
2. Dokažte $((x \subseteq y) \wedge (y \subset z)) \rightarrow x \subset z$.

2. přednáška, 28. 2. 2019

3. Napište „množina x je jednoprvková“ formulí základního jazyka teorie množin.
4. Dokažte, že „množina všech množin“ neexistuje (s využitím axiomu vydělení).
5. Dokažte $(\forall z)(x \in z \leftrightarrow y \in z) \rightarrow x = y$ (s využitím axiomu dvojice).
6. Rozepište trojici (a, b, c) jako množinu jen pomocí složených závorek.

3. přednáška, 7. 3. 2019

7. Ukažte, že axiom fundovanosti (spolu s ostatními axiomy) zakazuje existenci množin, které jsou prvky sama sebe, a obecněji existenci konečných cyklů v relaci náležení (tj. množin y_1, y_2, \dots, y_n takových, že $y_1 \in y_2 \wedge y_2 \in y_3 \wedge \dots \wedge y_{n-1} \in y_n \wedge y_n \in y_1$).
8. Předpokládejme, že A, B jsou třídivé proměnné zastupující třídivé termy $\{x; \varphi(x)\}, \{y; \psi(y)\}$, kde $\varphi(x), \psi(x)$ jsou formule základního jazyka teorie množin. Rozepište formuli $A \subset B$ v základním jazyce teorie množin.
9. Předpokládejme, že a je neprázdná množina. Musí být $\bigcap a$ množina?
10. Ukažte, že pro třídu X obecně neplatí $X \times X^2 = X^3$ (zvolte např. $X = \{\emptyset\}$).

4. přednáška, 14. 3. 2019

11. Ověřte, že pro libovolnou relaci R a relaci identity Id je $R \circ \text{Id} = \text{Id} \circ R = R$.
12. Ověřte, že pro libovolné množiny x, y a relaci náležení E platí $(x, y) \in E \circ E \leftrightarrow x \in \bigcup y$.

5. přednáška, 21. 3. 2019

13. Napište definici „uspořádání R na třídě A je dobré“ jako formuli (s využitím zavedených zkratk a rozšíření jazyka).

14. Najděte nějaké množiny x , na nichž je relace náležení ostré uspořádání, a navíc uspořádání $E \cup \text{Id}$ je na x dobré. Jako dílčí krok můžete hledat x takové, na nichž je relace náležení tranzitivní.

6. přednáška, 28. 3. 2019

15. Uvažujme potenční množinu $\mathcal{P}(x)$ množiny x uspořádanou relací \subseteq . Ověřte, že pro každou podmnožinu $A \subseteq \mathcal{P}(x)$ platí $\sup_{\subseteq} A = \bigcup A$.
16. Dokažte, že každá neklesající funkce z $[0, 1]$ do $[0, 1]$ (ne nutně spojitá) má pevný bod. Můžete napodobit důkaz lemmatu o monotónním zobrazení z přednášky.
17. Ověřte, že funkce $g : \omega \times \omega \rightarrow \omega$ definovaná jako $g(m, n) = 2^m \cdot 3^n$ je prostá, a že funkce $h : \omega \times \omega \rightarrow \omega$ definovaná jako $h(m, n) = 2^m \cdot (2n + 1) - 1$ je bijekce mezi $\omega \times \omega$ a ω . (Symbolem ω označujeme množinu $\{0, 1, 2, \dots\}$. Přirozená čísla a operace s nimi chápeme zatím intuitivně.)
18. Pomocí Cantorovy–Bernsteinovy věty pro „intuitivně“ chápané množiny \mathbb{N} a \mathbb{Q} dokažte, že $\mathbb{N} \cong \mathbb{Q}$. (Racionální čísla např. můžeme reprezentovat jako celočíselné zlomky v základním tvaru).
19. Pomocí Cantorovy–Bernsteinovy věty dokažte, že úsečka $[0, 1]$ a čtverec $[0, 1] \times [0, 1]$ mají stejnou mohutnost. Využijte např. desetinný rozvoj reálných čísel (která zatím chápeme intuitivně).
20. Pokuste se definovat „ x je konečná množina“ (aspoň dvěma různými způsoby; např. pomocí uspořádání nebo zobrazení).

7. přednáška, 4. 4. 2019

21. Napište formuli pro $\text{Fin}(x)$ podle Tarského definice konečnosti (každá neprázdná podmnožina $\mathcal{P}(x)$ má maximální prvek vzhledem k inkluzi).
22. Ověřte, že v každé lineárně uspořádané množině jsou každé dvě její dolní podmnožiny porovnatelné inkluzí.

8. přednáška, 11. 4. 2019

23. Ověřte, že v každé uspořádané množině je sjednocení systému libovolně mnoha dolních množin dolní množina.

9. přednáška, 18. 4. 2019

24. Dokažte, že pro každou konečnou množinu x a každé zobrazení f s definičním oborem x platí $\text{Rng}(f) \preceq x$. Můžete použít např. princip indukce pro konečné množiny.

25. Dokažte, že každou konečnou množinu x lze dobře uspořádat. Můžete opět postupovat indukcí pro konečné množiny.

10. přednáška, 25. 4. 2019

26. Dokažte, že množina ω všech přirozených čísel je dedekindovsky nekonečná. (Např. stačí ukázat, že funkce následníka je prostá, ale jejím oborem hodnot není celá ω .)
27. Dokažte princip silné indukce pro přirozená čísla: Je-li $X \subseteq \omega$ podmnožina splňující 1) $0 \in X$ a 2) $(\forall n \in \omega)(n \subseteq X \rightarrow n \in X)$, pak $X = \omega$. Můžete využít, že náležení je dobré ostré uspořádání na ω .
28. Dokažte, že pro každé zobrazení f s definičním oborem ω platí $\text{Rng}(f) \preccurlyeq \omega$. Využijte existence dobrého uspořádání na ω .

11. přednáška, 2. 5. 2019

29. Nechť A je nespočetná, B spočetná a C konečná množina. Dokažte, že množiny $A \cup C$ a $A - C$ jsou nespočetné, zatímco $B \cup C$ a $B - C$ jsou spočetné. Postupujte např. indukcí pro konečné množiny nebo podle mohutnosti C .
30. Ověřte, že lexikografické uspořádání na množině $\omega \times \omega$ je dobré.
31. Ověřte, že lexikografické uspořádání na množině $\omega \times 2$ je izomorfní s uspořádáním \in na množině ω .
32. Ověřte, že lexikografické uspořádání na množině $2 \times \omega$ není izomorfní s uspořádáním \in na množině ω .
33. Ověřte, že maximo-lexikografické uspořádání na množině $\omega \times \omega$ je izomorfní s uspořádáním \in na množině ω .

12. přednáška, 9. 5. 2019

34. (Pokrytí racionálních čísel intervaly)
Nechť $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ je množina všech racionálních čísel mezi 0 a 1. Je-li $I = (a, b)$ otevřený interval, jeho délku definujeme jako $d(I) = b - a$.
- (a) Dokažte (indukcí), že pokud $n \in \mathbb{N}$ a I_1, I_2, \dots, I_n jsou otevřené intervaly splňující $A \subset \bigcup_{k=1}^n I_k$, pak pro součet jejich délek platí

$$\sum_{k=1}^n d(I_k) \geq 1.$$

Využijte hustoty \mathbb{Q} , tj. mezi každými dvěma různými reálnými čísly je aspoň jedno racionální.

- (b) Dokažte, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje nekonečná posloupnost otevřených intervalů I_1, I_2, \dots taková že $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ a

$$\sum_{i=1}^{\infty} d(I_k) < \varepsilon.$$

Využijte spočetnosti množiny \mathbb{Q} .

13. přednáška, 16. 5. 2019

35. Ukažte, že následující dvě definice spojitosti funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ v bodě a jsou ekvivalentní:
- (a) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(x \in (a - \delta, a + \delta) \rightarrow f(x) \in (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon))$
 - (b) Je-li (a_1, a_2, \dots) posloupnost splňující $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a)$.

V důkaze implikace (b) \Rightarrow (a) najděte krok, kde využíváte axiom výběru.

36. Ověřte, že sjednocení libovolného řetězce prostých zobrazení (vzhledem k inkluzi) je prosté zobrazení.
37. Pomocí principu maximality dokažte: je-li (A, \leq) uspořádaná množina, pak pro každý řetězec $B \subseteq A$ existuje řetězec C splňující $B \subseteq C \subseteq A$, který je s touto vlastností maximální v inkluzi.
38. Dokažte, že princip maximality je ekvivalentní variantě principu maximality, kde se předpokládá, že každý řetězec má supremum (místo pouhé horní meze).
39. Odvoďte princip dobrého uspořádání z principu maximality. (Uvažujte dobrá uspořádání na podmnožinách a porovnejte je relací "rozšiřování".)

13. přednáška, 25. 5. 2019

40. Dokažte, že třída X je tranzitivní právě tehdy, když $\bigcup X \subseteq X$.
41. Dokažte, že je-li X tranzitivní třída, pak náležení je tranzitivní na X právě tehdy, když každý prvek $x \in X$ je tranzitivní množina.
42. Dokažte, že pro každá dvě ordinální čísla x, y platí $x \in y \leftrightarrow x \subset y$. (Pro zpětnou implikaci stačí dokázat, že x je nejmenší prvek $y - x$.)
43. Dokažte, že každá neprázdná podtřída \mathbf{On} má nejmenší prvek vzhledem k \in . Můžete předpokládat, že \in je lineární ostré uspořádání na \mathbf{On} .

44. Dokažte, že je-li X tranzitivní vlastní třída, dobře ostře uspořádaná náležitím, pak $X = \mathbf{On}$.
45. Uvažujme potenční třídu $\mathcal{P}(X)$ třídy X uspořádanou relací \subseteq . Ověřte, že pro každou neprázdnou část $A \subseteq \mathcal{P}(X)$ platí $\inf_{\subseteq} A = \bigcap A$, a podobně pro každou část $A \subseteq \mathcal{P}(X)$ platí $\sup_{\subseteq} A = \bigcup A$.
46. Dokažte, že $\omega = \sup_{<} \omega$ v uspořádání $(\mathbf{On}, <)$. (Hlavní krok je odvození identity $\bigcup \omega = \omega$).

Bonusová otázka

47. * Existuje nespočetný ordinál? Pokud ano, lze jeho existenci dokázat v ZF, tj. bez axiomu výběru?