

Doporučené příklady k Teorii množin, LS 2017/2018

1. přednáška, 23. 2. 2018

1. Napište „množina x je prázdná“ (přesněji „množina x nemá žádné prvky“) formulí základního jazyka teorie množin.

2. přednáška, 2. 3. 2018

2. Dokažte $((x \subseteq y) \wedge (y \subset z)) \rightarrow x \subset z$.
3. Napište „množina x je jednoprvková“ formulí základního jazyka teorie množin.
4. Dokažte $(\forall z)(x \in z \leftrightarrow y \in z) \rightarrow x = y$.
5. Rozepište trojici (a, b, c) jako množinu jen pomocí složených závorek.
6. Dokažte, že „množina všech množin“ neexistuje.

3. přednáška, 9. 3. 2018

7. Ukažte, že axiom fundovanosti zakazuje existenci množin, které jsou prvky sama sebe, a obecněji existenci konečných cyklů v relaci náležení (tj. množin $y_1, y_2, \dots, y_n$ takových, že $y_1 \in y_2 \wedge y_2 \in y_3 \wedge \dots \wedge y_{n-1} \in y_n \wedge y_n \in y_1$).
8. Předpokládejme, že A, B jsou třídivé proměnné zastupující třídivé termy $\{x; \varphi(x)\}, \{y; \psi(y)\}$, kde $\varphi(x), \psi(x)$ jsou formule základního jazyka teorie množin. Rozepište formuli $A \subset B$ v základním jazyce teorie množin.

4. přednáška, 16. 3. 2018

9. Ukažte, že pro třídu X obecně neplatí $X \times X^2 = X^3$ (zvolte např. $X = \{\emptyset\}$).
10. Ověřte, že pro libovolnou relaci R a relaci identity Id je $R \circ \text{Id} = \text{Id} \circ R = R$.
11. Ověřte, že pro libovolné množiny x, y a relaci náležení E platí $(x, y) \in E \circ E \Leftrightarrow x \in \bigcup y$.

5. přednáška, 23. 3. 2018

12. Napište definici „uspořádání R na třídě A je dobré“ jako formuli (s využitím zavedených zkratk a rozšíření jazyka).
13. Najděte nějaké množiny x , na nichž je relace náležení ostré uspořádání a navíc $E \cup \text{Id}$ je na x dobré. Jako dílčí krok můžete hledat x takové, na nichž je relace náležení tranzitivní.

14. Pokuste se definovat „ x je konečná množina“ (třeba i více různými způsoby).

6. přednáška, 6. 4. 2018

15. Dokažte, že každá neklesající funkce z $[0,1]$ do $[0,1]$ (ne nutně spojitá) má pevný bod. Můžete napodobit důkaz lemmatu o monotónním zobrazení z přednášky.
16. Ověřte, že funkce $g : \omega \times \omega \rightarrow \omega$ definovaná jako $g(m, n) = 2^m \cdot 3^n$ je prostá, a že funkce $h : \omega \times \omega \rightarrow \omega$ definovaná jako $h(m, n) = 2^m \cdot (2n + 1) - 1$ je bijekce mezi $\omega \times \omega$ a ω . (Symbolem ω označujeme množinu $\{0, 1, 2, \dots\}$. Přirozená čísla a operace s nimi chápeme zatím intuitivně.)
17. Pomocí Cantorovy–Bernsteinovy věty dokažte, že úsečka $[0, 1]$ a čtverec $[0, 1] \times [0, 1]$ mají stejnou mohutnost. Využijte např. desetinný rozvoj reálných čísel (která zatím chápeme intuitivně).
18. Napište formuli pro $\text{Fin}(x)$ podle Tarského definice konečnosti (každá neprázdná podmnožina $\mathcal{P}(x)$ má maximální prvek vzhledem k inkluzi).

9. přednáška, 27. 4. 2018

19. Dokažte, že pro každou konečnou množinu x a každé zobrazení f s definičním oborem x platí $\text{Rng}(f) \preceq x$. Můžete použít např. princip indukce pro konečné množiny.
20. Dokažte, že pro každé zobrazení f s definičním oborem ω platí $\text{Rng}(f) \preceq \omega$. Využijte existence dobrého uspořádání na ω .
21. Dokažte princip silné indukce pro přirozená čísla: Je-li $X \subseteq \omega$ podmnožina splňující 1) $0 \in X$ a 2) $(\forall n \in \omega)(n \subseteq X \rightarrow n \in X)$, pak $X = \omega$. Můžete využít, že náležením je dobré ostré uspořádání na ω .

10. přednáška, 4. 5. 2018

22. Nechť A je nespočetná, B spočetná a C konečná množina. Dokažte, že množiny $A \cup C$ a $A - C$ jsou nespočetné, zatímco $B \cup C$ a $B - C$ jsou spočetné.
23. Ověřte, že lexikografické uspořádání na množině $\omega \times \omega$ je dobré.
24. Ověřte, že lexikografické uspořádání na množině $\omega \times 2$ je izomorfní s uspořádáním $\in$ na množině ω .
25. Ověřte, že lexikografické uspořádání na množině $2 \times \omega$ není izomorfní s uspořádáním $\in$ na množině ω .

26. Ověřte, že maximo-lexikografické uspořádání na množině $\omega \times \omega$ je izomorfní s uspořádáním $\in$ na množině ω .

11. přednáška, 11. 5. 2018

27. (Pokrytí racionálních čísel intervaly)

Nechť $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ je množina všech racionálních čísel mezi 0 a 1. Je-li $I = (a, b)$ otevřený interval, jeho délku definujeme jako $d(I) = b - a$.

- (a) Dokažte (indukcí), že pokud $n \in \mathbb{N}$ a $I_1, I_2, \dots, I_n$ jsou otevřené intervaly splňující $A \subset \bigcup_{k=1}^n I_k$, pak pro součet jejich délek platí

$$\sum_{k=1}^n d(I_k) \geq 1.$$

Využijte hustoty $\mathbb{Q}$, tj. mezi každými dvěma různými reálnými čísly je aspoň jedno racionální.

- (b) Dokažte, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje nekonečná posloupnost otevřených intervalů $I_1, I_2, \dots$ taková že $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ a

$$\sum_{i=1}^{\infty} d(I_k) < \varepsilon.$$

Využijte spočetnosti množiny $\mathbb{Q}$.

12. přednáška, 18. 5. 2018

28. Ukažte, že následující dvě definice spojitosti funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ v bodě a jsou ekvivalentní:

- (a) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(x \in (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow f(x) \in (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon))$
(b) Je-li $(a_1, a_2, \dots)$ posloupnost splňující $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a)$.

V důkaze implikace (b) $\Rightarrow$ (a) najděte krok, kde využíváte axiom výběru.

29. Pomocí principu maximality dokažte: je-li $(A, \leq)$ uspořádaná množina, pak pro každý řetězec $B \subseteq A$ existuje řetězec C splňující $B \subseteq C \subseteq A$, který je s touto vlastností maximální v inkluzi.
30. Dokažte, že princip maximality je ekvivalentní variantě principu maximality, kde se předpokládá, že každý řetězec má supremum (místo pouhé horní meze).

31. Odvoďte princip dobrého uspořádání z principu maximality. (Uvažujte dobrá uspořádání na podmnožinách a porovnejte je relací "rozšiřování".)

13. přednáška, 25. 5. 2018

32. Dokažte, že třída X je tranzitivní právě tehdy, když $\bigcup X \subseteq X$.
33. Dokažte, že je-li X tranzitivní třída, pak náležení je tranzitivní na X právě tehdy, když každý prvek $x \in X$ je tranzitivní množina.
34. Dokažte, že pro každá dvě ordinální čísla x, y platí $x \in y \leftrightarrow x \subset y$.
35. Dokažte, že každá neprázdná podtřída **On** má nejmenší prvek.
36. Dokažte, že je-li X tranzitivní vlastní třída, dobře ostře uspořádaná náležením, pak $X = \mathbf{On}$.
37. Dokažte, že $\omega = \sup_{<} \omega$ v uspořádání $(\mathbf{On}, <)$. (Hlavní krok je odvození identity $\bigcup \omega = \omega$).

Bonusová otázka

38. * Existuje nespočetný ordinál? Pokud ano, lze jeho existenci dokázat v ZF, tj. bez axiomu výběru?