Příklady z Kombinatoriky a grafů I - LS 2015/2016

zadáno 1.-4. 3. 2016, odevzdat do 8.-11. 3. 2016

1. Zjistěte, které z následujících funkcí definovaných pro $n \in \mathbb{N}$ jsou v relaci $\Theta()$, a vzniklé třídy co nejlépe navzájem porovnejte pomocí relací $o()$ a $O()$. Logaritmy jsou se základem 2.

$$1,\ n\log n,\ 2^{\log\log n},\ (\log n)^{\log n},\ \log(n!),\ (\log n)^{\log\log n},\ n^{\frac{1}{\log n}},\ \log(n^{2016})$$

[2]

2. Zjistěte, které z následujících funkcí definovaných pro $n \in \mathbb{N}$ jsou v relaci $\Theta()$, a vzniklé třídy navzájem co nejlépe porovnejte pomocí relací $o()$ a $O()$. Logaritmy jsou se základem 2.

$$2^{2^{1+\log\log n}},\ \ 1+n^2\left(\sin\left(\frac{\pi}{8}n\right)+1\right),\ \ 1+n^2(\cos(8\pi n)+1),\ 1+n^4+(-1)^n\cdot n^4$$

[2]

---

zadáno 8.-11. 3. 2016, odevzdat do 15.-18. 3. 2016

3. Pomocí jednodušších funkcí odhadněte, jak zhruba rychle roste $\binom{an}{bn}$, kde $a > b > 0$ jsou konstanty. Zjistěte, zda roste rychleji $\binom{7n}{n}$ nebo $\binom{5n}{2n}$. **[2]**

---

zadáno 15.-18. 3. 2016, odevzdat do 22.-25. 3. 2016

4. Najděte generující funkci f pro posloupnost částečných součtů třetích mocnin přirozených čísel, tedy $(1, 1+8, 1+8+27, 1+8+27+64, \ldots)$. Pomocí funkce f odvoďte explicitní vzoreček pro n-tý prvek této posloupnosti. **[2]**

5. Označme $T_n = \{(a,b,c) \in \mathbb{N}^3; a+b+c = n\}$. Určete

$$\sum_{(a,b,c)\in T_n} abc.$$

[2]

zadáno 22.-25. 3. 2016, odevzdat do 29. 3.-1. 4. 2016

6. a) Dokažte (např. pomocí generujících funkcí), že pro libovolná přirozená čísla $k \geq s \geq 1$ platí

$$\sum_{i=0}^{k-s} (-1)^i \binom{s-1+i}{s-1} \binom{k}{s+i} = 1.$$

[3]

b) Pomocí identity z části a) odvoďte zobecněnou větu o principu inkluze a exkluze pro počet prvků, které jsou obsaženy v průniku aspoň s množin z $A_1, A_2, \ldots, A_n$. **[2]**

---

zadáno 22.-25. 3. 2016, odevzdat do 5.-8. 4. 2016

7. Najděte explicitní vyjádření n-tého členu posloupnosti definované rekurentně jako $a_0 = a_1 = a_2 = 1, a_{n+3} = a_{n+2} - 2a_{n+1} - 4a_n$ $(n \geq 0)$. **[3]**

8. Určete počet slov délky n z abecedy $\{a, b, c, d\}$, v nichž písmena a, b nejsou těsně vedle sebe. (3 body za nalezení rekurence, další 3 body za explicitní vzoreček) **[6]**

---

zadáno 5.-8. 4. 2016, odevzdat do 19.-22. 4. 2016

9. *Turistická cesta* je lomená čára z bodu $(0, 0)$ do bodu $(2n, 0)$ sestávající z $2n$ úseček, kde každá úsečka je určena vektorem $(1, 1)$ nebo $(1, -1)$. Tedy n úseček směřuje šikmo nahoru a zbylých n šikmo dolů, ale mohou být za sebou v libovolném pořadí. Ukažte, že počet turistických cest, které nikdy neklesnou pod osu x, je stejný jako počet turistických cest, na nichž přesně jedna úsečka má pravý konec pod osou x. **[3]**

10. Určete počet permutací množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$, které neobsahují podposloupnost a_1, a_2, a_3, kde $a_1 < a_3 < a_2$. (Např. permutace $2, 3, 5, 4, 1$ je zakázaná kvůli trojici $2, 5, 4$). **[3]**

11. Dokažte, že žádnou konečnou projektivní rovinu nelze reprezentovat pomocí bodů a přímek v (euklidovské) rovině. (Důkaz pro Fanovu rovinu bude za 2 body.) **[3]**

zadáno 12.-15. 4. 2016, odevzdat do 19.-22. 4. 2016

12. Spočítejte počet koster grafu osmistěnu. **[2]**

---

zadáno 19.-22. 4. 2016, odevzdat do 26.-29. 4. 2016

13. Spočítejte počet koster $K_{m,n}$. Můžete použít větu o počítání koster pomocí determinantu. **[2]**

14. a) Dokažte, že pro libovolné $s, t \geq 2$, každý graf na n vrcholech, který neobsahuje podgraf izomorfní $K_{s,t}$, má nejvýše

$$\frac{1}{2}(s-1)^{1/t}(n-t+1)n^{1-1/t} + \frac{t-1}{2}n$$

hran. (Spočítejte vhodné podgrafy dvěma způsoby.) **[2]**

b) Dokažte, že mezi libovolnými n body v rovině nejvýše $O(n^{3/2})$ dvojic bodů má vzdálenost 1. **[1]**

c) Dokažte, že mezi libovolnými n body v $\mathbb{R}^3$ nejvýše $O(n^{5/3})$ dvojic bodů má vzdálenost 1. **[1]**

d) Existuje $\varepsilon > 0$ takové, že mezi libovolnými n body v $\mathbb{R}^4$ nejvýše $O(n^{2-\varepsilon})$ dvojic bodů má vzdálenost 1? **[2]**

---

zadáno 26.-29. 4. 2016, odevzdat do 3.-6. 5. 2016

15. Dokažte, že každý 2-souvislý graf s n vrcholy má aspoň n koster. Platí to i pro hranově 2-souvislé grafy? **[2]**

16. Nechť $d \geq 2$. Dokažte, že každý souvislý d-regulární bipartitní graf je hranově 2-souvislý. **[2]**

zadáno 3.-6. 5. 2016, odevzdat do 10.-13. 5. 2016

17. Uvažujme graf Q_n (graf n-dimenzionální krychle, $n \geq 1$), jehož vrcholy tvoří množinu $\{0,1\}^n$ a hrany spojují vrcholy lišící se právě v jedné souřadnici. Na grafu Q_n definujme síť se zdrojem $s = (0,0,\ldots,0)$ a stokem $t = (1,1,\ldots,1)$, kde kapacita každé hrany je 1 (v obou směrech). Najděte

    a) celočíselný maximální tok, **[1]**

    b) maximální tok, který je na každé hraně kladný (aspoň v jednom směru). **[1]**

---

zadáno 3.-6. 5. 2016, odevzdat do 17.-20. 5. 2016

18. Pro každé $n \geq 1$ určete stupeň hranové souvislosti grafu Q_n (tedy největší k takové, že Q_n je hranově k-souvislý). **[2]**

19. Pro každé $n \geq 3$ určete stupeň vrcholové souvislosti grafu $G = K_n - C_n$ (G má n vrcholů, odebíráme pouze hrany kružnice C_n). **[2]**

---

zadáno 10.-13. 5. 2016, odevzdat do 17.-20. 5. 2016

20. Pro všechny dvojice přirozených čísel k, l splňující $1 \leq k \leq l$ najděte graf $G_{k,l}$, pro který $\mathrm{k_v}(G_{k,l}) = k$ a $\mathrm{k_e}(G_{k,l}) = l$. **[2]**

21. Pro všechny dvojice přirozených čísel d, n, které splňují $d \geq (n-1)/2$, dokažte, že každý graf na n vrcholech s minimálním stupněm d je hranově d-souvislý. **[3]**

22. Rozhodněte, zda existuje $k \geq 4$ takové, že pro každý k-souvislý graf G a každých k jeho vrcholů $v_1, v_2, \ldots, v_k$, v G existuje kružnice procházející všemi vrcholy $v_1, v_2, \ldots, v_k$ v tomto pořadí. **[4]**

zadáno 17.-20. 5. 2016, odevzdat do 24. 6. 2016,
nejpozději týden před zkouškou (pro jistotu)

23. Které $2k$-regulární grafy mají k-faktor? (k-faktor grafu G je k-regulární podgraf G obsahující všechny vrcholy G; k uvažujeme přirozené.) **[2]**

24. Nechť $k \geq 1$ je přirozené číslo. Dokažte, že každý $2k$-regulární graf má 2-faktor. **[3]**

25. Na šachovnici $n \times n$ je na každém políčku nezáporný počet kamenů, přičemž celkový počet kamenů v každém řádku i sloupci je přesně $2n$. Některá políčka mohou být prázdná. Dokažte, že lze vybrat n neprázdných políček tak, že z každého řádku i sloupce bude vybráno právě jedno. **[3]**

26. Dokažte, že pro každé přirozené n existuje N takové, že obarvíme-li hrany úplného grafu G na n vrcholech libovolným množstvím barev, pak v grafu G existují vrcholy $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tak, že je splněná aspoň jedna z následujících podmínek:

    1) indukovaný graf $G[v_1, v_2, \ldots, v_n]$ je duhový (tzn. všechny jeho hrany mají různou barvu),
    2) barva hrany v_iv_j, pro $i < j$, závisí jen na i. **[5]**

27. Najděte obarvení roviny 7 barvami tak, aby žádné dva body ve vzdálenosti 1 neměly stejnou barvu. **[2]**

28. Rozhodněte, zda v každém obarvení roviny dvěma barvami existuje jednobarevná trojice bodů tvořící vrcholy

    a) jednotkového rovnostranného trojúhelníka, **[2]**
    b) rovnoramenného trojúhelníka s úhlem 120° a dvěma přilehlými stranami délky 1, **[2]**
    c) "degenerovaného" trojúhelníka s délkami stran 1, 2, 3. **[3]**

29. Rozhodněte, pro která přirozená čísla k platí: existuje $n_0 > 0$ takové, že pro všechna přirozená $n > n_0$ každý souvislý graf na n vrcholech má indukovaný podgraf s přesně k hranami. **[6]**

30. Dokažte, že pro každé přirozené c existuje N tak, že pro každé obarvení množiny $[N] = \{1, 2, \ldots, N\}$ c barvami existuje trojice různých čísel x, y, z stejné barvy, splňující rovnici $x + y = 2z$ (jinými slovy - jednobarevná aritmetická posloupnost délky 3). Zkuste řešit indukcí podle c. **[5]**