

Kombinatorika a grafy I — Cvičení 2

1. Zjistěte, které z následujících funkcí jsou v relaci $\Theta()$, a vzniklé třídy co nejlépe navzájem porovnejte pomocí relací $o()$ a $O()$. Logaritmy jsou se základem 2.

$$n^3, e^n, 2^n, \binom{n}{3}, e^{\sqrt{n}}, \log^3(n), \log n, \log(n^3), 2^{2^n}, 2^{n^2}, 2^{n \log n}, n!, 1+n^3+(-1)^n \cdot n^3.$$

2. Dokažte, že $\sum_{k=1}^n k^{2015} = \Theta(n^{2016})$.

3. Dokažte, že $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \Theta(\log n)$.

4. Pomocí jednodušších funkcí odhadněte, jak zhruba rychle roste $\binom{an}{bn}$, kde $a > b > 0$ jsou konstanty. Zjistěte, zda roste rychleji $\binom{7n}{n}$ nebo $\binom{5n}{2n}$.

5. Pomocí jednodušších funkcí odhadněte, jak zhruba rychle roste $\binom{n^2}{n}$.

6. Nechť n, N jsou přirozená čísla. Uvažme náhodný podgraf G úplného grafu K_N , který vytvoříme tak, že každou hranu K_N vybereme nezávisle s pravděpodobností $1/2$ (G má stejné vrcholy jako K_N). Ukažte, že i když bude N exponenciálně velké vzhledem k n (zhruba $2^{n/2}$), tak G nebude mít s velkou pravděpodobností žádný úplný podgraf s n vrcholy ani nezávislou množinu s n vrcholy.

7. Odhadněte součet řady $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$.