Příklady z Kombinatoriky a grafů I - LS 2010/2011

1. a) Pro každou dvojici z následujících funkcí definovaných pro $n \in \mathbb{N}$ zjistěte, zda jsou v relaci O, o, Θ:

$$e^{2e^{\log\log n}}, \quad e^{e^{1+\log\log n}}, \quad 1+n^2\left(\sin\left(\frac{\pi}{8}n\right)+1\right), \quad 1+n^2(\cos(8\pi n)+1)$$

[3]

   b) Porovnejte navíc funkce z části a) s funkcí $1+n^2(\sin(n)+1)$. **[3]**

2. Sečtěte

$$\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}.$$

[2]

3. Sečtěte

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{4n}{2k} \qquad \text{a} \qquad \sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k\binom{4n}{2k+1}.$$

[3]

4. Kolika způsoby lze rozesadit n manželských párů okolo kulatého stolu na připravených $2n$ židlí tak, aby žádní dva manželé neseděli vedle sebe? Kolik je takových rozesazení, když navíc požadujeme, aby se po obvodu stolu střídali muži a ženy? **[3]**

5. Sečtěte (např. pomocí principu inkluze a exkluze a kombinatorické interpretace)

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(n+k-i)^n.$$

[3]

6. Sečtěte (např. pomocí principu inkluze a exkluze a kombinatorické interpretace)

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\binom{m+n-i}{j-i}.$$

[2]

7. Ve vězení je 100 vězňů odsouzených na doživotí. Jednoho dne jsou pozváni jeden po druhém do místnosti, kde je na stole v řadě 100 krabic a každá obsahuje papírek se jménem jednoho vězně (jméno každého z vězňů je právě v jedné krabici a jména jsou rozmístěna v náhodném pořadí). Vězeň, který vejde do místnosti s krabicemi, se může podívat do 50 krabic a přečíst si jméno na papírku uvnitř. Pokud každý vězeň najde svoje jméno, jsou všichni propuštěni. Vězni si mohou předem domluvit strategii, ale poté, co první z nich vstoupí do místnosti, už spolu nijak nekomunikují (ani si nesmí nechávat žádné vzkazy uvnitř místnosti). Poraďte jim, jak se mají domluvit, aby měli co největší (aspoň 10%) šanci, že budou propuštěni,

   a) pokud každý vězeň v místnosti může navíc změnit pořadí krabic, **[2]**

   b) pokud se krabice nesmí přesouvat. **[+2]**

   c) V případě a) najděte nejlepší strategii a dokažte, že je nejlepší. **[+1]**

8. Najděte generující funkci f pro posloupnost částečných součtů třetích mocnin přirozených čísel, tedy $(1, 1+8, 1+8+27, 1+8+27+64, ...)$. Pomocí funkce f odvoďte explicitní vzoreček pro n-tý prvek této posloupnosti. **[2]**

9. Označme $T_n = \{(a, b, c) \in \mathbb{N}^3; a+b+c = n\}$. Určete

$$\sum_{(a,b,c)\in T_n} abc.$$

[2]

10. Pomocí generujících funkcí sestrojte dvojici falešných (tzn. ne pravých) šestistěnných kostek takových, že každá z kostek má na svých stěnách celkem 6 přirozených čísel (čísla se mohou opakovat a kostky mohou být různé), a pro každé přirozené k platí: pravděpodobnost, že při hodu oběma kostkami bude součet padlých čísel k, je stejná jako pro dvojici pravých kostek (které mají čísla $1, 2, 3, 4, 5, 6$). I u falešných kostek předpokládáme, že každá stěna padne se stejnou pravděpodobností. **[2]**

11. a) Dokažte (např. pomocí generujících funkcí), že pro libovolná přirozená čísla $k \geq s \geq 1$ platí

$$\sum_{i=0}^{k-s} (-1)^i \binom{s-1+i}{s-1} \binom{k}{s+i} = 1.$$

[3]

   b) Pomocí identity z části a) odvoďte zobecněnou větu o principu inkluze a exkluze pro počet prvků, které jsou obsaženy v průniku aspoň s množin z $A_1, A_2, \ldots, A_n$. **[2]**

12. Najděte explicitní vyjádření n-tého členu posloupnosti definované rekurentně jako $a_0 = a_1 = a_2 = 1, a_{n+3} = a_{n+2} - 2a_{n+1} - 4a_n$ $(n \geq 0)$. **[3]**

13. Určete počet slov délky n z abecedy $\{a, b, c, d\}$, v nichž písmena a, b nejsou těsně vedle sebe. (3 body za nalezení rekurence, další 3 body za explicitní vzoreček) **[6]**

14. Určete počet permutací množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$, které neobsahují podposloupnost a_1, a_2, a_3, kde $a_1 < a_3 < a_2$. (Např. permutace $2, 3, 5, 4, 1$ je zakázaná kvůli trojici $2, 5, 4$). **[3]**

15. Spočítejte počet způsobů, kterými lze konvexní n-úhelník rozdělit pomocí úhlopříček na trojúhelníky. **[3]**

16. Dokažte, že žádnou konečnou projektivní rovinu nelze reprezentovat pomocí bodů a přímek v (euklidovské) rovině. **[3]**

17. Uvažujme graf Q_n (graf n-dimenzionální krychle, $n \geq 1$), jehož vrcholy tvoří množinu $\{0, 1\}^n$ a hrany spojují vrcholy lišící se právě v jedné souřadnici. Na grafu Q_n definujme síť se zdrojem $s = (0, 0, \ldots, 0)$ a stokem $t = (1, 1, \ldots, 1)$, kde kapacita každé hrany je 1 (v obou směrech). Najděte

    a) celočíselný maximální tok, **[1]**

    b) maximální tok, který je na každé hraně kladný (aspoň v jednom směru). **[1]**

18. Pro každé $n \geq 1$ určete stupeň hranové souvislosti grafu Q_n (tedy největší k takové, že Q_n je hranově k-souvislý). **[2]**

19. Pro každé $n \geq 3$ určete stupeň vrcholové souvislosti grafu $G = K_n \setminus C_n$ (G má n vrcholů, odebíráme pouze hrany kružnice C_n). **[2]**

20. Dokažte, že každý graf na n vrcholech s minimálním stupněm $d \geq (n-1)/2$ je hranově d-souvislý. **[3]**

21. Nechť $d \geq 2$. Dokažte, že každý souvislý d-regulární bipartitní graf je hranově 2-souvislý. **[3]**

22. Pro všechny dvojice přirozených čísel k, l splňující $1 \leq k \leq l$ najděte graf $G_{k,l}$, pro který $\mathrm{k_v}(G_{k,l}) = k$ a $\mathrm{k_e}(G_{k,l}) = l$. **[2]**

23. a) Dokažte, že pro libovolné $s, t \geq 2$, každý graf na n vrcholech, který neobsahuje podgraf izomorfní $K_{s,t}$, má nejvýše

$$\frac{1}{2}(s-1)^{1/t}(n-t+1)n^{1-1/t} + \frac{t-1}{2}n$$

hran. (Spočítejte vhodné podgrafy dvěma způsoby.) **[2]**

b) Dokažte, že mezi libovolnými n body v rovině nejvýše $O(n^{3/2})$ dvojic bodů má vzdálenost 1. **[2]**

c) Dokažte, že mezi libovolnými n body v $\mathbb{R}^3$ nejvýše $O(n^{5/3})$ dvojic bodů má vzdálenost 1. **[2]**

d) Existuje $\varepsilon > 0$ takové, že mezi libovolnými n body v $\mathbb{R}^4$ nejvýše $O(n^{2-\varepsilon})$ dvojic bodů má vzdálenost 1? **[2]**

24. Které $2k$-regulární grafy mají k-faktor? (k-faktor grafu G je k-regulární podgraf G obsahující všechny vrcholy G) **[2]**

25. Dokažte, že každý $2k$-regulární graf má 2-faktor. **[3]**

26. Nechť $n \geq k \geq 1$. Na šachovnici $n \times n$ je rozmístěno několik kamenů tak, že z každých $k+1$ kamenů leží nějaké dva ve stejném řádku nebo sloupci. Ukažte, že lze najít r řádků a s sloupců, které pokrývají pozice všech kamenů, a navíc $r + s \leq k$. **[3]**

27. Dokažte, že pro každé přirozené n existuje N takové, že obarvíme-li hrany úplného grafu G na n vrcholech libovolným množstvím barev, pak v grafu G existují vrcholy $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tak, že je splněná aspoň jedna z následujících podmínek:

    1) indukovaný graf $G[v_1, v_2, \ldots, v_n]$ je duhový (tzn. všechny jeho hrany mají různou barvu),
    2) barva hrany v_iv_j, pro $i < j$, závisí jen na i. **[5]**

28. Rozhodněte, zda v každém obarvení roviny dvěma barvami existuje jednobarevná trojice bodů tvořící vrcholy

    a) jednotkového rovnostranného trojúhelníka, **[2]**
    b) "degenerovaného" trojúhelníka s délkami stran 1, 2, 3. **[2]**

29. Najděte obarvení roviny 7 barvami tak, aby žádné dva body ve vzdálenosti 1 neměly stejnou barvu. **[2]**

30. Rozhodněte, pro která přirozená čísla k platí: existuje $n_0 > 0$ takové, že pro všechna přirozená $n > n_0$ každý souvislý graf na n vrcholech má indukovaný podgraf s přesně k hranami. **[7]**

31. Dokažte, že pro každé přirozené c existuje N tak, že pro každé obarvení množiny $[N] = \{1, 2, \ldots, N\}$ c barvami existuje trojice různých čísel x, y, z stejné barvy, splňující rovnici $x + y = 2z$ (jinými slovy - jednobarevná aritmetická posloupnost délky 3). Zkuste řešit indukcí podle c. **[5]**