Příklady z Kombinatoriky a grafů I - LS 2008/2009

1. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n a pro každou n-tici kladných reálných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí
$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}.$$
[2]

2. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n a pro každou n-tici kladných reálných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí
$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$
[3]

3. a) Porovnejte následující funkce pomocí relací O, o, Θ:
$$e^{2e^{\log\log n}}, \quad e^{e^{1+\log\log n}}, \quad 1 + n^2\left(\sin\left(\frac{\pi}{8}n\right) + 1\right), \quad 1 + n^2(\cos(8\pi n) + 1)$$
[3]

   b) Porovnejte funkce z části a) s funkcí $1 + n^2(\sin(n) + 1)$. **[3]**

4. Ukažte, že na množině $\{1, 2, \ldots, k^2\}$ je $2^{\Omega(k^3)}$ částečných uspořádání, v nichž každý řetězec i antiřetězec má délku nejvýše k. **[3]**

5. Spočítejte délku a počet nejdelších řetězců v uspořádání dělitelů čísla 10! relací dělitelnosti. **[2]**

6. Najděte nejdelší antiřetězec v uspořádání dělitelů čísla 8! relací dělitelnosti (a dokažte, že delší neexistuje). **[4]**

7. Na množině $\mathbb{N}^k$ (množina k-tic přirozených čísel) definujeme uspořádání $\leq$ následovně:
$$(n_1, n_2, \ldots, n_k) \leq (m_1, m_2, \ldots, m_k) \Leftrightarrow \forall_{i \in \{1,\ldots,k\}}\; n_i \leq m_i.$$
Ukažte, že $(\mathbb{N}^k, \leq)$ neobsahuje nekonečný antiřetězec. **[5]**

8. Nechť $\mathbb{D} = \{\frac{z}{2^k}; z, k \in \mathbb{Z}, k \geq 0\}$. Ukažte, že částečná uspořádání $(\mathbb{Q}, \leq)$ a $(\mathbb{D}, \leq)$ jsou izomorfní. **[5]**

9. Kolika způsoby lze rozesadit n manželských párů okolo kulatého stolu na připravených $2n$ židlí tak, aby žádní dva manželé neseděli vedle sebe? Kolik je takových rozesazení, když navíc požadujeme, aby se po obvodu stolu střídali muži a ženy? **[3]**

10. Sečtěte (např. pomocí principu inkluze a exkluze a kombinatorické interpretace)
$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(n+k-i)^n.$$
[3]

11. Sečtěte (např. pomocí principu inkluze a exkluze a kombinatorické interpretace)
$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\binom{m+n-i}{j-i}.$$
[2]

12. Ve vězení je 100 vězňů odsouzených na doživotí. Jednoho dne jsou pozváni jeden po druhém do místnosti, kde je na stole v řadě 100 krabic a každá obsahuje papírek se jménem jednoho vězně (jméno každého z vězňů je právě v jedné krabici a jména jsou rozmístěna v náhodném pořadí). Vězeň, který vejde do místnosti s krabicemi, se může podívat do 50 krabic a přečíst si jméno na papírku uvnitř. Pokud každý vězeň najde svoje jméno, jsou všichni propuštěni. Vězni si mohou předem domluvit strategii, ale poté, co první z nich vstoupí do místnosti, už spolu nijak nekomunikují (ani si nesmí nechávat žádné vzkazy uvniř místnosti). Poraďte jim, jak se mají domluvit, aby měli co největší (aspoň 10%) šanci, že budou propuštěni. **[5]**

    Jaká je nejlepší strategie, pokud každý vězeň v místnosti má navíc dovoleno změnit pořadí krabic? **[2]**

13. Najděte generující funkci f pro posloupnost částečných součtů třetích mocnin přirozených čísel, tedy $(1, 1+8, 1+8+27, 1+8+27+64, ...)$. Pomocí funkce f odvoďte explicitní vzoreček pro n-tý prvek této posloupnosti. **[2]**

14. Pomocí generujících funkcí sestrojte dvojici falešných (tzn. ne pravých) šestistěnných kostek takových, že každá z kostek má na svých stěnách celkem 6 přirozených čísel (čísla se mohou opakovat a kostky mohou být různé), a pro každé přirozené k platí: pravděpodobnost, že při hodu oběma kostkami bude součet padlých čísel k, je stejná jako pro dvojici pravých kostek (které mají čísla $1, 2, 3, 4, 5, 6$). (I u falešných kostek předpokládáme, že každá stěna padne se stejnou pravděpodobností.) **[2]**

15. a) Dokažte (např. pomocí generujících funkcí a integrace per partes), že pro libovolná přirozená čísla $k \geq s \geq 1$ platí

$$\sum_{i=0}^{k-s} (-1)^i \binom{s-1+i}{s-1} \binom{k}{s+i} = 1.$$

[6]

b) Pomocí části a) odvoďte zobecněnou větu o principu inkluze a exkluze pro počet prvků, které jsou obsaženy v průniku aspoň s množin $A_1, A_2, \ldots, A_n$ **[2]**

16. Označme $T_n = \{(a,b,c) \in \mathbb{N}^3; a+b+c=n\}$. Určete

$$\sum_{(a,b,c)\in T_n} abc.$$

[2]

17. Najděte explicitní vyjádření n-tého členu posloupnosti definované rekurentně jako $a_0 = a_1 = a_2 = 1, a_{n+3} = a_{n+2} - 2a_{n+1} - 4a_n$ ($n \geq 0$). **[3]**

18. Určete počet slov délky n z abecedy $\{a,b,c,d\}$, v nichž písmena a, b nejsou těsně vedle sebe. (3 body za nalezení rekurence, další 3 body za explicitní vzoreček) **[6]**

19. Určete počet permutací množiny $\{1,2,\ldots,n\}$, které neobsahují podposloupnost a_1, a_2, a_3, kde $a_1 < a_3 < a_2$. (Např. permutace $2,3,5,4,1$ je zakázaná kvůli trojici $2,5,4$). **[3]**

20. Spočítejte počet způsobů, kterými lze konvexní n-úhelník rozdělit pomocí úhlopříček na trojúhelníky. **[3]**

21. Uvažujme graf Q_n (graf n-dimenzionální krychle, $n \geq 1$), jehož vrcholy tvoří množinu $\{0,1\}^n$ a hrany spojují vrcholy lišící se právě v jedné souřadnici. Určete stupeň hranové souvislosti Q_n (tedy největší k takové, že Q_n je hranově k-souvislý). **[2]**

22. Pro $n \geq 4$ určete stupeň vrcholové souvislosti grafu $K_n \setminus C_n$. **[2]**

23. Dokažte, že graf na n vrcholech s minimálním stupněm $d \geq (n-1)/2$ je hranově d-souvislý. **[3]**

24. Nechť $d \geq 2$. Dokažte, že každý souvislý d-regulární bipartitní graf je hranově 2-souvislý. **[3]**

25. Na grafu Q_n definujme síť se zdrojem $s = (0, 0, \dots, 0)$ a stokem $t = (1, 1, \dots, 1)$, kde kapacita každé hrany je 1 (v obou směrech). Najděte

a) celočíselný maximální tok, **[1]**

b) maximální tok, který je na všech hranách kladný. **[1]**

26. Které $2k$-regulární grafy mají k-faktor? (k-faktor grafu G je k-regulární podgraf G obsahující všechny vrcholy G) **[2]**

27. Dokažte, že každý $2k$-regulární graf má 2-faktor. **[3]**

28. Nechť $n \geq k \geq 1$. Na šachovnici $n \times n$ je rozmístěno několik kamenů tak, že z každých $k+1$ kamenů leží nějaké dva ve stejném řádku nebo sloupci. Ukažte, že lze najít r řádků a s sloupců, které pokrývají pozice všech kamenů, a navíc $r + s \leq k$. **[4]**

29. Spočítejte počet koster Q_3 (grafu trojrozměrné krychle). **[2]**

30. Spočítejte počet koster $K_{m,n}$. **[2]**

31. Dokažte, že žádnou konečnou projektivní rovinu nelze reprezentovat pomocí bodů a přímek v (euklidovské) rovině. **[3]**

32. a) Dokažte, že náhodný graf $G(n, 1/2)$ je skoro jistě souvislý (tedy že pravděpodobnost, že je souvislý, konverguje k 1 pro n jdoucí k nekonečnu). **[2]**

b) Dokažte, že i náhodný graf $G(n, p)$, kde $p = 1 - n^{-3/n}$, je skoro jistě souvislý. **[2]**

33. Házíme pravidelným čtyřstěnem, na jehož stěnách jsou napsána čísla $1, 2, 3, 4$. Skončíme, pokud součet posledních dvou hodů je prvočíslo. Jaká je pravděpodobnost, že poslední hozené číslo je 1? **[4]**

34. Dokažte, že pro každé přirozené n existuje N takové, že obarvíme-li hrany úplného grafu G na n vrcholech libovolným množstvím barev, pak v grafu G existují vrcholy $v_1, v_2, \dots, v_n$ tak, že je splněná aspoň jedna z následujících podmínek:

   1) indukovaný graf $G[v_1, v_2, \dots, v_n]$ je duhový (tzn. všechny jeho hrany mají různou barvu),
   2) barva hrany $v_i v_j$, pro $i < j$, závisí jen na i. **[5]**

35. Rozhodněte, zda v každém obarvení roviny dvěma barvami existuje jednobarevná trojice bodů tvořící vrcholy

   a) jednotkového rovnostranného trojúhelníka, **[2]**
   b) "degenerovaného" trojúhelníka s délkami stran 1, 2, 3. **[2]**

36. Najděte obarvení roviny 7 barvami tak, aby žádné dva body ve vzdálenosti 1 neměly stejnou barvu. **[2]**

37. Rozhodněte, pro která přirozená čísla k platí: existuje $n_0 > 0$ takové, že pro všechna přirozená $n > n_0$ každý souvislý graf na n vrcholech má indukovaný podgraf s přesně k hranami. **[7]**

38. Dokažte, že pro každé přirozené c existuje N tak, že pro každé obarvení množiny $[N] = \{1, 2, \ldots, N\}$ c barvami existuje trojice různých čísel x, y, z stejné barvy, splňující rovnici $x + y = 2z$ (jinými slovy - jednobarevná aritmetická posloupnost délky 3). Zkuste řešit indukcí podle c. **[5]**