Příklady k procvičení k Nekonečným množinám
ZS 2024/2025

1. přednáška, 2. 10. 2024

1. Dokažte, že každá dolní množina v $(\mathrm{On}, <)$ je ordinální číslo.

2. Je každá dobře uspořádaná vlastní třída izomorfní $(\mathrm{On}, <)$?

2. přednáška, 9. 10. 2024

3. Ověřte, že v každé uspořádané množině (třídě) je sjednocení systému libovolně mnoha dolních množin dolní množina (část).

4. Dokažte transfinitní rekurzí, že je-li $(A, \prec)$ dobře uspořádaná vlastní třída, kde pro každé $x \in A$ je dolní část $(\leftarrow, x)$ množina, pak $(A, \prec)$ je izomorfní $(\mathrm{On}, <)$.

5. Dokažte, že existuje podmnožina roviny, která má s každou přímkou v rovině společné právě dva body. Využijte princip dobrého uspořádání na očíslování množiny všech přímek i množiny všech bodů a postupujte transfinitní rekurzí. Můžete využít, že $\mathbb{R}^2$ má stejnou mohutnost jako $\mathbb{R}$.

6. Odvoďte princip dobrého uspořádání z axiomu výběru pomocí transfinitní rekurze. (S využitím selektoru na potenční množině $\mathcal{P}(a)$ definujte rekurzivně bijekci mezi vhodným ordinálem a množinou a).

7. Odvoďte princip dobrého uspořádání z principu maximality. (Uvažujte dobrá uspořádání na podmnožinách a porovnejte je relací „rozšiřování".)

3. přednáška, 16. 10. 2024

8. Pro normální ordinální funkci F dokažte, že vzor uzavřené třídy je tvaru $X \cap \mathrm{Dom}(F)$, kde X je uzavřená třída (tedy je uzavřený v $\mathrm{Dom}(F)$).

9. Pro normální ordinální funkci F a limitní ordinál $\lambda \in \mathrm{Dom}(F)$ dokažte, že $F(\lambda)$ je také limitní.

10. Ověřte, že třída pevných bodů ordinální funkce definované na On je uzavřená.

4. přednáška, 23. 10. 2024

11. Ověřte, že pro každý ordinál α je funkce $F(\xi) = \alpha + \xi$ spojitá.

12. Ověřte, že následující definice ordinální mocniny je ekvivalentní standardní rekurzivní definici: α^β je ordinální typ množiny všech zobrazení β do α s konečným nosičem, uspořádaných antilexikograficky; tj. $f < f'$ pokud pro největší γ, kde se f a f' liší, platí $f(\gamma) < f'(\gamma)$.

13. * V teorii ZF (bez axiomu výběru) dokažte existenci nespočetného ordinálu.

5. přednáška, 30. 10. 2024

14. Přiřaďte každé hydře vhodný ordinál tak, aby hydra vzniklá v libovolném n-tém kroku regenerací po useknutí hlavy Herkulem měla přiřazený menší ordinál než ta původní.

6. přednáška, 6. 11. 2024

15. Spočítejte hodnoty následujících funkcí Hardyovy hierarchie:

    (a) $H_{\omega+\omega}(n) =$

    (b) $H_{\omega\cdot k}(n) =$

    (c) $H_{\omega^2}(n) =$

7. přednáška, 13. 11. 2024

16. Dokažte, že pro každý spočetný limitní ordinál α je $\mathrm{cf}(\alpha) = \omega$.

17. Dokažte, že pro každý limitní ordinál α je $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) = \mathrm{cf}(\alpha)$.

8. přednáška, 20. 11. 2024

18. Dokažte, že v ZFC pro každé ordinální číslo α platí, že suma nejvýše $\aleph_\alpha$ množin mohutnosti nejvýše $\aleph_\alpha$ má mohutnost nejvýše $\aleph_\alpha$. (Definujte prosté zobrazení sumy do $\omega_\alpha \times \omega_\alpha$, podobně jako ve spočetném případě.)

19. Dokažte, že každý nekonečný singulární kardinál $\varkappa$ je supremum $\mathrm{cf}(\varkappa)$ regulárních kardinálů.

20. Ověřte podle definice kardinální mocniny, že $\varkappa^{\mu+\nu} = \varkappa^\mu \cdot \varkappa^\nu$ a $(\varkappa^\mu)^\nu = \varkappa^{\mu\cdot\nu}$.

9. přednáška, 27. 11. 2024

21. Ověřte, že lexikografické uspořádání na nekonečném kartézském součinu

$$\bigtimes_{i\in\omega} 2$$

není dobré.

10. přednáška, 4. 12. 2024

22. Ověřte, že každý řetězec ve stromě je dobře uspořádaná množina.

23. Odvoďte Königovu větu o stromech z principu maximality (bez použití rekurze).

24. Odvoďte nekonečnou Hallovu větu pomocí principu kompaktnosti.

25. Platí varianta nekonečné Hallovy věty pro systémy spočetných množin? Co když navíc každý spočetný podsystém má prostý selektor?

11. přednáška, 11. 12. 2024

26. Ukažte, že v každém konečném rozkladu $\mathbb{Q} = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n$ množiny racionálních čísel nějaká ze tříd X_i obsahuje izomorfní kopii $\mathbb{Q}$ vzhledem k uspořádání $\leq$. (Stačí ukázat, že X_i je hustá v nějakém neprázdném otevřeném intervalu).

27. Pomocí nekonečné Ramseyovy věty dokažte, že každá spočetná uspořádaná množina má nekonečný řetězec nebo nekonečný antiřetězec.

28. Pomocí nekonečné Ramseyovy věty dokažte, že každá spočetná lineárně uspořádaná množina má nekonečnou rostoucí posloupnost nebo nekonečnou klesající posloupnost (podmnožinu uspořádanou podle typu ω nebo ω^*).

12. přednáška, 18. 12. 2024

29. Ukažte, že pro každý nekonečný kardinál κ platí $2^\kappa \nrightarrow (3)^2_\kappa$.

30. S využitím obecnější Sierpinského věty ukažte, že každý slabě kompaktní kardinál je nedosažitelný.

31. Pomocí vhodného obarvení konečných podmnožin ω ukažte, že ω není Ramseyův kardinál.

32. Ukažte, že barevnost grafu jednotkových vzdáleností v rovině je aspoň 4 a nejvýše 7.

13. přednáška, 8. 1. 2025

33. Ukažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ lze jednotkový disk rozložit na $n+2$ částí a z nich složit jednotkový disk a n kopií polootevřené úsečky $(0, 1]$.

34. S pomocí tvrzení a vět z přednášky odvoďte (v ZFC):

    a) Každé dvě koule A, B (různě veliké) v $\mathbb{R}^3$ jsou vzájemně přeskládatelné pomocí konečného počtu částí (tj. existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $A \overset{n}{\cong} B$).

    b) Jsou-li A, B omezené podmnožiny $\mathbb{R}^3$ s neprázdným vnitřkem, pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $A \overset{n}{\cong} B$.

35. a) Nechť $x, y \in \mathbb{R}^2$, α je rotace okolo x o $180°$ a β je rotace okolo y o $120°$. Ukažte, že složené zobrazení $(\alpha\beta)^6$ je identita.

    b) Najděte netriviální nezkrátitelné slovo v abecedě $\{\alpha, \alpha^{-1}, \beta, \beta^{-1}\}$ takové, že po dosazení libovolných dvou rotací α, β v rovině (okolo libovolných dvou bodů, o libovolné úhly) příslušné složené zobrazení bude identita. (Nejprve ukažte, jak lze z libovolných dvou rotací a jejich inverzí poskládat posunutí.)