Příklady k procvičení k Nekonečným množinám
ZS 2020/2021

1. přednáška, 8. 10. 2020

1. Dokažte, že každá dolní množina v $(\mathrm{On}, <)$ je ordinální číslo.

2. přednáška, 15. 10. 2020

2. Je každá dobře uspořádaná vlastní třída izomorfní $(\mathrm{On}, <)$?

3. Ověřte, že v každé uspořádané množině je sjednocení systému libovolně mnoha dolních množin dolní množina.

4. Dokažte transfinitní rekurzí, že je-li $(A, \prec)$ dobře uspořádaná vlastní třída, kde pro každé $x \in A$ je dolní část $(\leftarrow, x)$ množina, pak $(A, \prec)$ je izomorfní $(\mathrm{On}, <)$.

5. Dokažte, že existuje podmnožina roviny, která má s každou přímkou v rovině společné právě dva body. Využijte princip dobrého uspořádání na očíslování množiny všech přímek i množiny všech bodů a postupujte transfinitní rekurzí.

6. Odvoďte princip dobrého uspořádání z axiomu výběru.

7. Odvoďte princip dobrého uspořádání z principu maximality. (Uvažujte dobrá uspořádání na podmnožinách a porovnejte je relací "rozšiřování".)

3. přednáška, 22. 10. 2020

8. Pro normální ordinální funkci F dokažte, že vzor uzavřené třídy je tvaru $X \cap \mathrm{Dom}(F)$, kde X je uzavřená třída (tedy je uzavřený v $\mathrm{Dom}(F)$).

9. Pro normální ordinální funkci F a limitní ordinál $\lambda \in \mathrm{Dom}(F)$ dokažte, že $F(\lambda)$ je také limitní.

10. Ověřte, že třída pevných bodů ordinální funkce definované na On je uzavřená.

11. Ověřte, že pro každý ordinál α je funkce $F(\xi) = \alpha + \xi$ spojitá.

12. * V teorii ZF (bez axiomu výběru) dokažte existenci nespočetného ordinálu.

4. přednáška, 29. 10. 2020

13. Přiřaďte každé hydře vhodný ordinál tak, aby hydra vzniklá v libovolném n-tém kroku regenerací po useknutí hlavy Herkulem měla přiřazený menší ordinál než ta původní.

5. přednáška, 5. 11. 2020

14. Spočítejte hodnoty následujících funkcí Hardyovy hierarchie:

    (a) $H_{\omega+\omega}(n) =$

    (b) $H_{\omega\cdot k}(n) =$

    (c) $H_{\omega^2}(n) =$

6. přednáška, 12. 11. 2020

15. Dokažte, že pro každý spočetný limitní ordinál α je $\mathrm{cf}(\alpha) = \omega$.

16. Dokažte, že pro každý limitní ordinál α je $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) = \mathrm{cf}(\alpha)$.

7. přednáška, 19. 11. 2020

17. Dokažte, že v ZFC pro každé ordinální číslo α platí, že suma nejvýše $\aleph_\alpha$ množin mohutnosti nejvýše $\aleph_\alpha$ má mohutnost nejvýše $\aleph_\alpha$. (Definujte prosté zobrazení sumy do $\omega_\alpha \times \omega_\alpha$, podobně jako ve spočetném případě.)

18. Dokažte, že každý nekonečný singulární kardinál $\varkappa$ je supremum $\mathrm{cf}(\varkappa)$ regulárních kardinálů.

19. Ověřte podle definice kardinální mocniny, že $\varkappa^{\mu+\nu} = \varkappa^\mu \cdot \varkappa^\nu$ a $(\varkappa^\mu)^\nu = \varkappa^{\mu\cdot\nu}$.

8. přednáška, 26. 11. 2020

20. Ověřte, že lexikografické uspořádání na nekonečném kartézském součinu

$$\bigtimes_{i\in\omega} 2$$

    není dobré.

9. přednáška, 3. 12. 2020

21. Ověřte, že každý řetězec ve stromě je dobře uspořádaná množina.

22. Odvoďte Königovu větu o stromech z principu maximality (bez použití rekurze).

10. přednáška, 10. 12. 2020

23. Odvoďte nekonečnou Hallovu větu pomocí principu kompaktnosti.

24. Platí varianta nekonečné Hallovy věty pro systémy spočetných množin?

25. Ukažte, že v každém konečném rozkladu $\mathbb{Q} = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n$ množiny racionálních čísel nějaká ze tříd X_i obsahuje izomorfní kopii $\mathbb{Q}$ vzhledem k uspořádání $\leq$. (Stačí ukázat, že X_i je hustá v nějakém neprázdném otevřeném intervalu).

11. přednáška, 17. 12. 2020

26. Pomocí nekonečné Ramseyovy věty dokažte, že každá nekonečná uspořádaná množina má nekonečný řetězec nebo nekonečný antiřetězec.

27. Pomocí nekonečné Ramseyovy věty dokažte, že každá nekonečná lineárně uspořádaná množina má nekonečnou rostoucí posloupnost nebo nekonečnou klesající posloupnost (podmnožinu uspořádanou podle typu ω nebo ω^*).

28. Ukažte, že pro každý nekonečný kardinál κ platí $2^\kappa \nrightarrow (3)^2_\kappa$.

29. S využitím obecnější Sierpinského věty ukažte, že každý slabě kompaktní kardinál je nedosažitelný.

30. Pomocí vhodného obarvení konečných podmnožin ω ukažte, že ω není Ramseyův kardinál.

12. přednáška, 7. 1. 2021

31. Ukažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ lze jednotkový disk rozložit na $n+2$ částí a z nich složit jednotkový disk a n kopií polootevřené úsečky $(0, 1]$.

32. S pomocí tvrzení a vět z přednášky odvoďte (v ZFC):
    a) Každé dvě koule A, B (různě veliké) v $\mathbb{R}^3$ jsou vzájemně přeskládatelné pomocí konečného počtu částí (tj. existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $A \overset{n}{\cong} B$).
    b) Jsou-li A, B omezené podmnožiny $\mathbb{R}^3$ s neprázdným vnitřkem, pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $A \overset{n}{\cong} B$.

33. a) Nechť $x, y \in \mathbb{R}^2$, α je rotace okolo x o 180° a β je rotace okolo y o 120°. Ukažte, že složené zobrazení $(\alpha\beta)^6$ je identita.
    b) Najděte netriviální slovo v abecedě $\{\alpha, \alpha^{-1}, \beta, \beta^{-1}\}$ takové, že po dosazení libovolných dvou rotací α, β v rovině (okolo libovolných dvou bodů, o libovolné úhly) příslušné složené zobrazení bude identita. (Nejprve ukažte, jak lze z libovolných dvou rotací a jejich inverzí poskládat posunutí.)