Příklady k procvičení k Nekonečným množinám
ZS 2019/2020

1. přednáška, 3. 10. 2019

1. Dokažte, že každá dolní množina v $(\mathrm{On}, <)$ je ordinální číslo.
2. Je každá dobře uspořádaná vlastní třída izomorfní $(\mathrm{On}, <)$?

2. přednáška, 10. 10. 2019

3. Ověřte, že v každé uspořádané množině je sjednocení systému libovolně mnoha dolních množin dolní množina.
4. Dokažte transfinitní rekurzí, že je-li $(A, \prec)$ dobře uspořádaná vlastní třída, kde pro každé $x \in A$ je dolní část $(\leftarrow, x)$ množina, pak $(A, \prec)$ je izomorfní $(\mathrm{On}, <)$.
5. Odvoďte princip dobrého uspořádání z axiomu výběru.
6. Odvoďte princip dobrého uspořádání z principu maximality. (Uvažujte dobrá uspořádání na podmnožinách a porovnejte je relací "rozšiřování".)

3. přednáška, 17. 10. 2019

7. Pro normální ordinální funkci F dokažte, že vzor uzavřené třídy je tvaru $X \cap \mathrm{Dom}(F)$, kde X je uzavřená třída (tedy je uzavřený v $\mathrm{Dom}(F)$).
8. Pro normální ordinální funkci F a limitní ordinál $\lambda \in \mathrm{Dom}(F)$ dokažte, že $F(\lambda)$ je také limitní.
9. Ověřte, že třída pevných bodů ordinální funkce definované na On je uzavřená.
10. Ověřte, že pro každý ordinál α je funkce $F(\xi) = \alpha + \xi$ spojitá.

4. přednáška, 24. 10. 2019

11. * V teorii ZF (bez axiomu výběru) dokažte existenci nespočetného ordinálu.
12. Přiřaďte každé hydře vhodný ordinál tak, aby hydra vzniklá v libovolném n-tém kroku regenerací po useknutí hlavy Herkulem měla přiřazený menší ordinál než ta původní.

5. přednáška, 31. 10. 2019

13. Spočítejte hodnoty následujících funkcí Hardyovy hierarchie:
    (a) $H_{\omega+\omega}(n) =$
    (b) $H_{\omega\cdot\omega}(n) =$
    (c) $H_{\omega^3}(n) =$

6. přednáška, 7. 11. 2019

14. Dokažte, že pro každý spočetný limitní ordinál α je $\mathrm{cf}(\alpha) = \omega$.

15. Dokažte, že pro každý limitní ordinál α je $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) = \mathrm{cf}(\alpha)$.

7. přednáška, 14. 11. 2019

16. Dokažte, že v ZFC pro každé ordinální číslo α platí, že suma nejvýše $\aleph_\alpha$ množin mohutnosti nejvýše $\aleph_\alpha$ má mohutnost nejvýše $\aleph_\alpha$. (Definujte prosté zobrazení sumy do $\omega_\alpha \times \omega_\alpha$, podobně jako ve spočetném případě.)

17. Dokažte, že každý nekonečný singulární kardinál κ je supremum $\mathrm{cf}(\kappa)$ regulárních kardinálů.

18. Ověřte podle definice kardinální mocniny, že $\kappa^{\mu+\nu} = \kappa^\mu \cdot \kappa^\nu$ a $(\kappa^\mu)^\nu = \kappa^{\mu\cdot\nu}$.

9. přednáška, 5. 12. 2019

19. Ověřte, že každý řetězec ve stromě je dobře uspořádaná množina.

20. Odvoďte Königovu větu o stromech z principu maximality (bez použití rekurze).

10. přednáška, 12. 12. 2019

21. Odvoďte nekonečnou Hallovu větu pomocí principu kompaktnosti.

22. Platí varianta nekonečné Hallovy věty pro systémy spočetných množin?

23. Ukažte, že v každém konečném rozkladu $\mathbb{Q} = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n$ množiny racionálních čísel nějaká ze tříd X_i obsahuje izomorfní kopii $\mathbb{Q}$ vzhledem k uspořádání $\leq$. (Stačí ukázat, že X_i je hustá v nějakém neprázdném otevřeném intervalu).

11. přednáška, 19. 12. 2019

24. Pomocí nekonečné Ramseyovy věty dokažte, že každá nekonečná uspořádaná množina má nekonečný řetězec nebo nekonečný antiřetězec.

25. Pomocí nekonečné Ramseyovy věty dokažte, že každá nekonečná lineárně uspořádaná množina má nekonečnou rostoucí posloupnost nebo nekonečnou klesající posloupnost (podmnožinu uspořádanou podle typu ω nebo ω^*).

26. Ukažte, že pro každý nekonečný kardinál κ platí $2^\kappa \nrightarrow (3)^2_\kappa$.

27. S využitím obecnější Sierpinského věty ukažte, že každý slabě kompaktní kardinál je nedosažitelný.

28. Pomocí vhodného obarvení konečných podmnožin ω ukažte, že ω není Ramseyův kardinál.

12. přednáška, 9. 1. 2020

29. Ukažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ lze jednotkový disk rozložit na $n + 2$ částí a z nich složit jednotkový disk a n kopií polootevřené úsečky $(0, 1]$.

30. S pomocí tvrzení a vět z přednášky odvoďte (v ZFC):

    (a) Každé dvě koule A, B (různě veliké) v $\mathbb{R}^3$ jsou vzájemně přeskládatelné pomocí konečného počtu částí (tj. existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $A \overset{n}{\cong} B$).

    (b) Jsou-li A, B omezené podmnožiny $\mathbb{R}^3$ s neprázdným vnitřkem, pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $A \overset{n}{\cong} B$.