

Příklady k procvičení k Nekonečným množinám

ZS 2018/2019

1. přednáška, 3. 10. 2018

1. Dokažte, že každá dolní množina v $(\text{On}, <)$ je ordinální číslo.

2. přednáška, 10. 10. 2018

2. Je každá dobře uspořádaná vlastní třída izomorfní $(\text{On}, <)$?
3. Dokažte, že je-li $(A, \prec)$ dobře uspořádaná vlastní třída, kde pro každé $x \in A$ je dolní část $(\prec, x)$ množina, pak $(A, \prec)$ je izomorfní $(\text{On}, <)$.
4. Odvoďte princip dobrého uspořádání z axiomu výběru.
5. Odvoďte princip dobrého uspořádání z principu maximality. (Uvažujte dobrá uspořádání na podmnožinách a porovnejte je relací "rozšiřování".)

3. přednáška, 17. 10. 2018

6. * V teorii ZF (bez axiomu výběru) dokažte existenci nespočetného ordinálu.
7. Pro normální ordinální funkci F dokažte, že vzor uzavřené třídy je tvaru $X \cap \text{Dom}(F)$, kde X je uzavřená třída.
8. Pro normální ordinální funkci F a limitní ordinál $\lambda \in \text{Dom}(F)$ dokažte, že $F(\lambda)$ je také limitní.
9. Ověřte, že třída pevných bodů ordinální funkce je uzavřená.
10. Ověřte, že pro každý ordinál α je funkce $F(\xi) = \alpha + \xi$ spojitá.

5. přednáška, 31. 10. 2018

11. Přiřaďte každé hydře vhodný ordinál tak, aby hydra vzniklá v libovolném n -tém kroku regenerací po useknutí hlavy Herkulem měla přiřazený menší ordinál než ta původní.

7. přednáška, 14. 11. 2018

12. Dokažte, že pro každý spočetný limitní ordinál α je $\text{cf}(\alpha) = \omega$.
13. Dokažte, že pro každý limitní ordinál α je $\text{cf}(\aleph_\alpha) = \text{cf}(\alpha)$.

8. přednáška, 21. 11. 2018

14. Dokažte, že v ZFC pro každé ordinální číslo α platí, že suma nejvýše $\aleph_\alpha$ množin mohutnosti nejvýše $\aleph_\alpha$ má mohutnost nejvýše $\aleph_\alpha$. (Definujte prosté zobrazení sumy do $\omega_\alpha \times \omega_\alpha$, podobně jako ve spočetném případě.)

9. přednáška, 28. 11. 2018

15. Dokažte, že každý nekonečný singulární kardinál κ je supremum $\text{cf}(\kappa)$ regulárních kardinálů.
16. Ověřte podle definice kardinální mocniny, že $\kappa^{\mu+\nu} = \kappa^\mu \cdot \kappa^\nu$ a $(\kappa^\mu)^\nu = \kappa^{\mu \cdot \nu}$.

10. přednáška, 5. 12. 2018

17. Ověřte, že každý řetězec ve stromě je dobře uspořádaná množina.
18. Odvoďte Königovu větu o stromech z principu maximality (bez použití rekurze).

11. přednáška, 12. 12. 2018

19. Odvoďte nekonečnou Hallovu větu z konečné pomoci principu kompaktnosti.
20. Ukažte, že v každém konečném rozkladu $\mathbb{Q} = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n$ množiny racionálních čísel nějaká ze tříd X_i obsahuje izomorfní kopii $\mathbb{Q}$ vzhledem k uspořádání $\leq$. (Stačí ukázat, že X_i je hustá v nějakém neprázdném otevřeném intervalu).

12. přednáška, 19. 12. 2018

21. Pomocí nekonečné Ramseyovy věty dokažte, že každá nekonečná uspořádaná množina má nekonečný řetězec nebo nekonečný antiřetězec.
22. Pomocí nekonečné Ramseyovy věty dokažte, že každá nekonečná lineárně uspořádaná množina má nekonečnou rostoucí posloupnost nebo nekonečnou klesající posloupnost (podmnožinu uspořádanou podle typu ω nebo ω^*).
23. Ukažte, že pro každý nekonečný kardinál κ platí $2^\kappa \nrightarrow (3)_\kappa^2$.
24. S využitím obecnější Sierpinského věty ukažte, že každý slabě kompaktní kardinál je nedosažitelný.

13. přednáška, 9. 1. 2019

25. Dokažte, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje nekonečná posloupnost otevřených intervalů $I_1, I_2, \dots$ taková že $\mathbb{Q} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ a pro součet jejich délek platí

$$\sum_{i=1}^{\infty} d(I_k) < \varepsilon.$$

Využijte spočetnosti množiny $\mathbb{Q}$.

26. Ukažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ lze jednotkový disk rozložit na $n + 2$ částí a z nich složit jednotkový disk a n kopií polootevřené úsečky $(0, 1]$.
27. S pomocí tvrzení a vět z přednášky odvoďte (v ZFC):
- (a) Každé dvě koule A, B (různě veliké) v $\mathbb{R}^3$ jsou vzájemně přeskládatelné pomocí konečného počtu částí (tj. existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $A \stackrel{n}{\cong} B$).
 - (b) Jsou-li A, B omezené podmnožiny $\mathbb{R}^3$ s neprázdným vnitřkem, pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $A \stackrel{n}{\cong} B$.