Matematické dovednosti — důkazy

1. **Přímý důkaz.** Nechť m a n jsou celá čísla. Dokažte:

   (a) Pokud n a m jsou lichá, $n + m$ je sudé.

   (b) Pokud n a m jsou lichá, $n \cdot m$ je liché; jinak $n \cdot m$ je sudé.

   (c) (AG nerovnost) Pro všechna reálná čísla $x, y \geq 0$ platí $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$.

   (d) Každé liché přirozené číslo je rozdílem dvou druhých mocnin přirozených čísel.

2. **Důkaz rozborem případů.** Dokažte:

   (a) Pro každé přirozené n je $n^3 - n$ dělitelné třemi.

   (b) Pro všechna reálná čísla a, b platí $|a - b| \leq |a| + |b|$.

3. **Nepřímý důkaz.** Nechť n je přirozené číslo. Dokažte:

   a) Pokud n^2 je liché, pak n je liché.

   b) Je-li číslo zapsané v desítkové soustavě pomocí samých jedniček prvočíslo, počet použitých jedniček je také prvočíslo.

   c) Přirozené číslo, které dává zbytek 2 po dělení čtyřmi, nemůže být druhou mocninou žádného přirozeného čísla.

4. **Důkaz sporem.** Dokažte:

   a) Pokud s a t jsou druhé mocniny přirozených čísel a jsou lichá, pak jejich součet není druhá mocnina přirozeného čísla.

   b) Pokud a, b a c jsou lichá čísla, pak rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ nemá žádné celočíselné řešení. (Nápověda: Uvažujte zvlášť případ, že x je sudé a x je liché.)

   c) Pokud a, b a c jsou lichá čísla, pak rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ nemá žádné *racionální* řešení. (Nápověda: Uvažujte $x = p/q$ a diskutujte různé kombinace parity p a q.)

   d) Dokažte, že $\sqrt{2}$ je iracionální.

5. **Důkaz indukcí.** Fibonacciova posloupnost $F_0, F_1, F_2 \ldots$ je definovaná následovně: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pro $n > 1$. Dokažte pro každé přirozené n:

   (a) $\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$,

   (b) F_n a F_{n+1} jsou nesoudělná.

6. **Důkaz (silnou) indukcí.** Dokažte:

   (a) Každé přirozené číslo lze rozložit na součin prvočísel. Navíc takový rozklad je až na pořadí činitelů jednoznačný.

   (b) Každé racionální číslo z intervalu $(0, 1)$ lze zapsat jako součet $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_k}$, kde k je přirozené číslo a $n_1, n_2, \ldots, n_k$ jsou navzájem různá přirozená čísla.

   (c) Lze rozklad jako v (b) nalézt pro libovolné kladné racionální číslo?

7. Najděte chybu v následujícím důkazu.

   Tvrzení. *Každý graf s n vrcholy a n hranami obsahuje trojúhelník.*

   Důkaz. Pro $n \leq 2$ žádný graf s n hranami neexistuje. Pro $n = 3$ je takový graf jen K_3, a ten trojúhelník obsahuje. Dále postupujeme indukcí: postupným přidáváním jednoho vrcholu a jedné hrany trojúhelník určitě nikam nezmizí. $\square$