

Matematické dovednosti — množiny

1. Zapište následující množiny množinovým zápisem:

- (a) množina všech celých sudých čísel
- (b) množina všech celých lichých čísel
- (c) množina všech mocnin čísla 2 (s nezáporným celočíselným exponentem)
- (d) množina všech celočíselných dělitelů celého čísla n
- (e) množina všech celých čísel, která jsou druhou mocninou celého lichého čísla
- (f) množina všech celých čísel, která jsou odmocninou celého sudého čísla
- (g) množina všech přirozených trojčiferných čísel
- (h) množina všech přirozených čísel, která nemají žádného dvojčiferného dělitele
- (i) množina všech prvočísel (např. jako množina přirozených čísel, která mají právě dva přirozené dělitele; nebo i jiným způsobem)
- (j) množina všech přirozených čísel, která mají právě 2021 přirozených dělitelů

2. Připomeňte si význam základních množinových vztahů a operací a popište je pomocí výroků s kvantifikátory:

- | | |
|-----------------------|-------------------------|
| • $A = B$ | • $x \in A \cup B$ |
| • $A \subseteq B$ | • $x \in A \cap B$ |
| • $A \not\subseteq B$ | • $x \in A \setminus B$ |
| • $A \neq \emptyset$ | • $x \in A \Delta B$ |

3. Které z následujících výroků jsou pravdivé?

- | | |
|-----------------------------------|--|
| (a) $\emptyset = \{\emptyset\}$ | (c) $\mathcal{P}(\emptyset) = \emptyset$ |
| (b) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ | (d) $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ |

4. Určete, kolik prvků mají následující množiny, a které to jsou.

- (a) $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \emptyset\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$
- (b) $\{1\} \cup \{1, 1\} \cup \{1, \{1\}, 1\} \cup \{1, \{1, 1\}, 1\} \cup \{1, \{1, \{1\}, 1\}, 1\}$

5. Vyjádřete velikosti množin $A \cup B$, $A \times B$, $\mathcal{P}(A)$ a $\binom{A}{k}$ pomocí $|A|$, $|B|$ a $|A \cap B|$.

6. Zapište následující množiny výčtem prvků. (Co když sjednocení nahradíme průniky?)

- (a) $\bigcup_{i=1}^{10} \{j \in \mathbb{N}; j^2 \leq i\}$
- (b) $\bigcup_{i=1}^{10} \{\{j \in \mathbb{N}; j^2 \leq i\}\}$
- (c) $\{\bigcup_{i=1}^{10} \{j \in \mathbb{N}; j^2 \leq i\}\}$

7. Necht' $A = \{7, 8, 9, 10\}$.

- (a) Zapište množinovým zápisem, nikoli však výčtem prvků, množinu B všech dvouprvkových podmnožin A , které neobsahují 10.
- (b) Určete velikosti následujících množin: B , $\bigcup_{k=1}^{|A|} \binom{A}{k}$, $\bigcup_{k=0}^{|A|} \{\binom{A}{k}\}$, $2^{\binom{A}{2}}$.

8. Porovnejte následující dvojice množin. (Předpokládejte, že indexy i probíhají nějakou neprázdnou indexovou množinou.)

- (a) $2^{A \setminus B}$ a $2^A \setminus 2^B$,
- (b) $2^{A \cup B}$ a $2^A \cup 2^B$,
- (c) $2^{A \cap B}$ a $2^A \cap 2^B$,
- (d) $\mathcal{P}(\bigcup_i A_i)$ a $\bigcup_i \mathcal{P}(A_i)$,
- (e) $(\bigcup_i A_i) \setminus B$ a $\bigcup_i (A_i \setminus B)$,
- (f) $(\bigcap_i A_i) \setminus B$ a $\bigcap_i (A_i \setminus B)$,
- (g) trojici množin $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{X; X \subseteq \{1, \dots, n\}\}$ a $\bigcup_{k=0}^{\infty} \binom{\mathbb{N}}{k}$.

9. Necht' \mathbb{P} je množina prvočísel. Zapište:

- (a) všechna čísla v M_1 jsou prvočísla
- (b) každé prvočíslu je v M_2
- (c) každé číslo v M_3 je prvočíslu
- (d) M_4 obsahuje nějaké prvočíslu
- (e) M_5 neobsahuje všechna prvočísla
- (f) M_6 neobsahuje žádná prvočísla.

10. Mějme množiny $R, S, T \subseteq \mathbb{Z}$. Definujte

- (a) množinu A obsahující všechna čísla, která jsou součtem nějakého čísla z R s číslem z S .
- (b) množinu B všech lichých čísel z množiny T .
- (c) množinu C všech druhých mocnin čísel z R a třetích mocnin čísel z T .
- (d) množinu D těch čísel z R , která nejsou dělitelná žádným číslem z množiny S .

11. Zapište:

- (a) množinu prvků, které se nacházejí v alespoň dvou z množin M_1, M_2, \dots, M_n
- (b) množinu všech podmnožin množiny M , které obsahují sudý počet prvků.

12. Necht' A_1, A_2, \dots, A_n a B_1, B_2, \dots, B_n jsou libovolné množiny. Porovnejte množiny

$$M_1 = \bigcap_{i=1}^n (A_i \cup B_i), \quad M_2 = \left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right) \cup \left(\bigcap_{i=1}^n B_i \right), \quad M_3 = \bigcap_{i=1}^n \left(\bigcap_{j=1}^n (A_i \cup B_j) \right).$$

13. Správně přečtěte a vyčíslete zápisy:

(a)

$$\bigcup_{I \in \binom{\{1,2,3,4\}}{3}} \bigcap_{i \in I} \{i-1, i, i+1\}$$

(b)

$$\sum_{p \in \mathbb{P}, p < 10} \left| \bigcap_{i=1}^p \binom{\{i, \dots, 2p\}}{2} \right|$$

14. Necht' $\{X_1, \dots, X_6\} = \binom{\{1,2,3,4\}}{2}$. Jakých hodnot může nabývat výraz

$$\sum_{i=1}^6 \left| \bigcup_{j \in X_i} X_j \right| ?$$