Matematické dovednosti — kvantifikátory

1. Pro $X = \{1, 2, 3\}$ a nějaké reálné číslo a přepište následující výroky s kvantifikátory na výroky bez kvantifikátorů.

   (a) $(\forall x \in X)\ x > a$,

   (b) $(\exists x \in X)\ x > a$.

   Implikuje jeden z výroků ten druhý? Pro které hodnoty a je pravdivý první výrok a pro které druhý? Negujte oba dva výroky. Uvažujte výroky a jejich negace pro $X = \emptyset$ a určete, pro které hodnoty a jsou pravdivé.

2. Přepište následující slovní tvrzení do formulí s kvantifikátory. Pokud není uvedeno jinak, kvantifikujte přes množinu všech přirozených čísel.

   (a) Žádné číslo z množiny M není větší než 57.

   (b) Pokud množina M obsahuje všechny dělitele čísla 15, pak M obsahuje i všechny dělitele čísla 27.

   (c) Pro každé číslo z množiny Y platí, že pokud je sudé, potom jeho trojnásobek je také sudý.

   (d) Existuje číslo, které je aspoň tak velké jako všechna čísla z množiny X.

   (e) Pokud každé sudé číslo patří do množiny M, pak žádné sudé číslo nepatří do množiny N.

   (f) Pro každé číslo z množiny A a každé číslo z množiny B platí, že jejich součin je 16.

   (g) Pro žádné číslo z množiny C a žádné číslo z množiny D neplatí, že jejich součin je 7.

   (h) Existuje číslo, jehož každý dělitel je menší než 523.

   (i) Každé číslo x má nějakého dělitele, který není dělitelem žádného jiného čísla než x.

   (j) Pro každé číslo y existuje číslo z množiny K, které je větší než y a které není dělitelné žádným číslem z množiny L.

3. Následující formule jsou kvantifikované přes reálná čísla s omezující podmínkou:

   (a) $(\forall y \neq 0)\ y^3 \neq 0$,

   (b) $(\exists z > 0)\ z^2 = 2$.

   Přepište je tak, aby byly kvantifikované přes všechna reálná čísla.

4. Rozhodněte o pravdivosti následujících formulí kvantifikovaných přes celá čísla:

   (a) $(\forall n)(\exists m)\ n^2 < m$,

   (b) $(\exists n)(\forall m)\ n < m^2$,

   (c) $(\forall n)(\exists m)\ n + m = 0$,

   (d) $(\exists n)(\forall m)\ nm = m$,

   (e) $(\exists n)(\exists m)\ n^2 + m^2 = 5$,

   (f) $(\exists n)(\exists m)\ (n + m = 4 \wedge n - m = 2)$,

   (g) $(\forall n)(\forall m)(\exists p)\ p = (m + n)/2$.

5. Pro $X = \{1, 2, 3\}$ a nějakou formuli $\varphi(x, y)$ přepište $(\forall y \in X)(\exists x \in X)\, \varphi(x, y)$ bez kvantifikátorů.

6. Jsou následující dva výroky o reálných číslech a funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ekvivalentní? Pokud ne, implikuje jeden z nich ten druhý?

   A) $(\forall x)(\exists K > 0)\ |f(x+1) - f(x)| \leq K$
   B) $(\exists K > 0)(\forall x)\ |f(x+1) - f(x)| \leq K$

7. Negujte následující formule:

   (a) $(\forall x)(x > 0 \Rightarrow (\exists y)(y > 0 \wedge x > y))$
   (b) $(\exists x)(x > 0 \wedge (\forall y)(y > x \wedge 0 > y))$
   (c) $(\forall x)(\exists y)((x < y) \wedge (\forall z)(x > z \Rightarrow y > z))$
   (d) $(\forall x, y)(\exists z)(x > y \Rightarrow (x > z \wedge z > y))$

8. Rozhodněte o pravdivosti následujících formulí a znegujte je:

   (a) $(\forall x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z})(\forall z \in \mathbb{Z})\ z > x \Rightarrow z > y,$
   (b) $(\exists y \in \mathbb{Z})(\forall x \in \mathbb{Z})(\forall z \in \mathbb{Z})\ z > x \Rightarrow z > y.$

   Co kdybychom místo celých čísel kvantifikovali pouze přes přirozená čísla?

9. Negujte následující výroky.

   (a) Každá rada drahá.
   (b) Není zde nikdo takový, kdo neumí derivovat.
   (c) Libovolný student, který umí derivovat, umí také integrovat.
   (d) Pro každé reálné x existuje celé číslo k takové, že x^k je větší než 1.
   (e) Existuje přirozené číslo, jehož každý dělitel je menší než 523.
   (f) Každé přirozené číslo x má nějakého dělitele, který není dělitelem žádného jiného čísla než x.
   (g) Žádný učený z nebe nespadl.
   (h) Každý pes jiná ves.
   (i) Není na světě člověk ten, jenž by se zavděčil lidem všem.

   Zvolte si své oblíbené přísloví ve tvaru výroku s kvantifikátory a znegujte ho.

10. „Vytýkání kvantifikátorů." Které z následujících dvojic výroků jsou ekvivalentní?

   (a) $((\forall x)\, P(x)) \vee ((\forall x)\, Q(x))$ a $(\forall x)(P(x) \vee Q(x))$
   (b) $((\forall x)\, P(x)) \wedge ((\forall x)\, Q(x))$ a $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x))$
   (c) $((\exists x)\, P(x)) \vee ((\exists x)\, Q(x))$ a $(\exists x)(P(x) \vee Q(x))$
   (d) $((\exists x)\, P(x)) \wedge ((\exists x)\, Q(x))$ a $(\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$
   (e) $((\forall x)\, P(x)) \Rightarrow ((\forall x)\, Q(x))$ a $(\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x))$
   (f) $((\exists x)\, P(x)) \Rightarrow ((\exists x)\, Q(x))$ a $(\exists x)(P(x) \Rightarrow Q(x))$