

Matematické dovednosti — úvodní test

Tento test nemá vliv na získání zápočtu.

Příklad 1. Vyberte, které z následujících tvrzení je negací tvrzení „Jestliže je dnes svátek, žádný student není ve škole.“

1. Dnes je svátek a každý student je ve škole.
2. Dnes je svátek a alespoň jeden student je ve škole.
3. Jestliže je nějaký student ve škole, není dnes svátek.
4. Dnes není svátek nebo není žádný student ve škole.

Příklad 2. Vyberte, které z následujících tvrzení je negací tvrzení „V každém ročníku je student, který má výuku alespoň tři dny v týdnu.“

1. V každém ročníku má alespoň jeden student výuku nejvýše dva dny v týdnu.
2. V každém ročníku mají všichni studenti výuku nejvýše dva dny v týdnu.
3. Existuje ročník, ve kterém má nějaký student výuku nejvýše dva dny v týdnu.
4. Existuje ročník, ve kterém mají všichni studenti výuku nejvýše dva dny v týdnu.

Příklad 3. Rozhodněte, které z následujících výroků jsou ekvivalentní výroku „ $A \Rightarrow \neg B$ “.

1. $A \wedge \neg B$
2. $\neg(A \wedge B)$
3. $B \Rightarrow \neg A$
4. $\neg B \Rightarrow A$
5. $\neg A \vee \neg B$

Příklad 4. Vyberte z následujících výroků ty, které jsou pravdivé.

1. Jestliže je dnes neděle, pak v této učebně není žádný učitel.
2. Dnes je neděle nebo v této učebně není žádný učitel.
3. Jestliže v této učebně je alespoň jeden učitel, není dnes neděle.
4. Pokud je dnes neděle, je každá osoba v této učebně učitel.

Příklad 5. Označme $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ množinu přirozených čísel. O následujících tvrzeních rozhodněte, zda jsou pravdivá.

1. $(\exists x \in \mathbb{N})((\forall y \in \mathbb{N})y > x) \Rightarrow x < 0$,
2. $(\exists x \in \mathbb{N})((\forall y \in \mathbb{N})(y > x \Rightarrow x < 0))$.

Příklad 6. Kolik prvků má množina $\{a, \emptyset, \{a, a\}, \{a, b\}, \{a\}, \{b, a\}, b, a\}$?

Vypište, které to jsou. (Můžete předpokládat, že a, b jsou navzájem různé a neprázdné.)

Příklad 7. Určete počet prvků množiny

$$\bigcup_{i=1}^{10} \{i, 2i, 3i\} .$$

Příklad 8. Necht' A, B, C, D jsou libovolné množiny. Definujme čtyři nové množiny

$$\begin{aligned} M_1 &= A \setminus (B \cup C \cup D), \\ M_2 &= A \setminus (B \cap C \cap D), \\ M_3 &= (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \cup (A \setminus D), \\ M_4 &= (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \cap (A \setminus D). \end{aligned}$$

Porovnejte množiny M_1, M_2, M_3, M_4 navzájem (zda je jedna podmnožinou druhé, případně zda se rovnají).

Příklad 9. Je pravda, že každé číslo v množině

$$\{z \in \mathbb{Z}; (\exists k \in \mathbb{Z})(z = 2k + 1 \vee z = 2k - 1)\}$$

je liché?

Příklad 10. Zapište matematickou formulí (beze slov) tvrzení „Množina S obsahuje všechna celá sudá čísla“.

Následující úlohu řešte, až pokud budete hotovi s ostatními příklady.

Bonusová úloha. Na zámku Whitehead byla zavražděna lady Robinsonová, vévodkyně z Yorku. Při policejním vyšetřování byly zjištěny následující skutečnosti.

1. V okolí místa činu se v době vraždy pohybovali pouze čtyři lidé: bratranec zavražděné lord Russell, její komorník Gödel, velitel nedaleké vojenské posádky generál Fraenkel a jeho pobočník seržant Zermelo. Nikdo jiný se zločinu nemohl dopustit.
2. Vraždy se dopustil buď jeden pachatel, nebo dva pachatelé pracující společně. Žádný další člověk není do vraždy zapleten.
3. Ohledáním místa činu se zjistilo, že alespoň jeden z pachatelů měl na sobě uniformu. Ani lord Russell, ani komorník Gödel uniformu nenosí.
4. Generál Fraenkel vypověděl, že ani on sám, ani lord Russell se zločinu nemohli dopustit, protože v době vraždy hráli spolu karty.
5. Lord Russell vypověděl, že v době vraždy hrál karty s nějakým člověkem v uniformě. Už si ale nevzpomíná, jestli to byl Fraenkel nebo Zermelo.
6. Lord Russell tvrdí, že Zermelo by se nikdy zločinu nedopustil, pokud by do něj nebyl zapleten i jeho nadřízený.
7. O Gödelovi je známo, že nesnáší lorda Russella a generála Fraenkela, a tudíž by s nimi rozhodně nespolečně pracoval na zločinu.
8. Nevinný člověk vždy vypovídá pravdu.

Je možné na základě těchto informací některého z podezřelých usvědčit z podílu na vraždě? Je možné někoho zbavit podezření?