Dodatky ke Kapitolám z diskrétní matematiky

10. 2. 2017

1 Matematická indukce

Axiom (Princip silné indukce)**.** *Platí-li*

1) $V(1)$ *a zároveň*

2) $(\forall n \geq 2)\ (V(1) \wedge V(2) \wedge \cdots \wedge V(n-1)) \Rightarrow V(n)$,

pak platí $(\forall n \in \mathbb{N})\ (V(n))$.

2 Částečná uspořádání

Věta. *Nechť* (X, R) *je konečná částečně uspořádaná množina. Pak existuje lineární uspořádání* S *na* X *takové, že* $R \subseteq S$. *(Jinými slovy: každé konečné částečné uspořádaní lze rozšířit na lineární uspořádání.)*

V Kapitolách cvičení 1.6.8 ve vydání z r. 2000, Věta 2.2.1 ve vydání z r. 2009

Věta (O dlouhém a širokém; Mirského věta)**.** *Pro každou konečnou částečně uspořádanou množinu* $P = (X, \preceq)$ *platí* $\alpha(P) \cdot \omega(P) \geq |X|$. *Dokonce* X *lze rozložit na* $\omega(P)$ *antiřetězců.*

V Kapitolách cvičení 6.2.9 ve vydání z r. 2000, Věta 2.4.5 ve vydání z r. 2009

Lemma (Erdős–Szekeresovo lemma)**.** *Nechť* $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$ *je posloupnost různých reálných čísel. Pak existují indexy* $i_1 < i_2 < \cdots < i_{n+1}$ *takové, že* $a_{i_1} < a_{i_2} < \cdots < a_{i_{n+1}}$ *nebo* $a_{i_1} > a_{i_2} > \cdots > a_{i_{n+1}}$. *(Tedy existuje rostoucí nebo klesající podposloupnost délky* $n+1$.*)*

V Kapitolách cvičení 6.2.10 ve vydání z r. 2000, Věta 2.4.6 ve vydání z r. 2009

3 Pravděpodobnost

Definice (Podmíněná pravděpodobnost)**.** Nechť A, B jsou jevy v konečném pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathbf{P})$ takové, že $\mathbf{P}(B) > 0$. *Pravděpodobnost jevu* A *za podmínky* B je

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Věta (Bayesova věta)**.** *Nechť* A, B *jsou jevy v konečném pravděpodobnostním prostoru* $(\Omega, \mathbf{P})$ *takové, že* $\mathbf{P}(A) > 0$, $\mathbf{P}(B) > 0$. *Pak platí*

$$\mathbf{P}(B|A) = \frac{\mathbf{P}(A|B)\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(A)}.$$

Pozorování. *Nechť A, B jsou jevy v konečném pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathbf{P})$ takové, že $\mathbf{P}(B) > 0$. Pak A, B jsou nezávislé právě tehdy, když*

$$\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A).$$

4 Grafy

Definice. Cestu s n vrcholy značíme P_n. (V Kapitolách se ale značí jako P_{n-1}.)

Věta. *Graf G je bipartitní právě tehdy, když neobsahuje lichou kružnici.*

V Kapitolách cvičení 3.2.3 ve vydání z r. 2000, cvičení 4.2.3 ve vydání z r. 2009

Důkaz. ($\Rightarrow$) Je-li G bipartitní, je i každý jeho podgraf bipartitní, se stejným rozkladem vrcholů do dvou podmnožin. Pokud je nějaká kružnice C bipartitní, pak lze její vrcholy rozdělit do dvou množin A, B tak, že každý vrchol z A sousedí se dvěma vrcholy z B a naopak. Počet hran C je tedy roven zároveň $2|A|$ a zároveň $2|B|$. To znamená, že $|A| = |B|$, a počet vrcholů C je tedy $|A| + |B| = 2|A|$, což je sudé číslo. Bipartitní graf tudíž nemůže obsahovat lichou kružnici.

($\Leftarrow$) Předpokládejme, že graf G neobsahuje lichou kružnici. Větu stačí dokázat pro každou komponentu zvlášť, můžeme tedy bez újmy na obecnosti předpokládat, že G je souvislý. Zvolme vrchol $u \in V(G)$ a proveďme prohledání G do šířky z u. Jednotlivé vrstvy označme podle vzdálenosti od u následovně:

$$V_i = \{v \in V(G); d_G(u, v) = i\}.$$

Tedy V_1 je množina sousedů u, V_2 jsou sousedi vrcholů z V_1 ve zbytku grafu, atd. Definujme rozklad $V(G)$ na následující množiny A, B:

$$A = V_1 \cup V_3 \cup \dots, \qquad B = \{v\} \cup V_2 \cup V_4 \cup \dots.$$

Tedy A je množina vrcholů liché vzdálenosti od u a B je množina vrcholů sudé vzdálenosti od u. Z konstrukce množin V_i plyne, že mezi V_i a V_j nevede hrana pokud $|i - j| \geq 2$. Zbývá tedy ukázat, že každá množina V_i je nezávislá v G, tedy že v grafu G není žádná hrana s oběma vrcholy ve V_i.

Postupujme sporem. Nechť i je nejmenší přirozené číslo takové, že G obsahuje hranu vw, kde $v, w \in V_i$. To znamená, že existuje cesta délky i z u do v i z u do w. Označme si vrcholy na těchto dvou cestách jako $u = v_0, v_1, v_2, \dots, v_i = v$ a $u = w_0, w_1, w_2, \dots, w_i = w$. Nechť j je maximální index takový, že $v_j = w_j$. Pak $v_j v_{j+1} \dots v_i w_i w_{i-1} \dots w_{j+1} w_j$ je kružnice délky $2(i - j) + 1$. Tím dostáváme spor, protože jsme našli lichou kružnici v G. $\square$