

Diskrétní matematika — Cvičení 8

1. V 1. ročníku je 200 studentů a každý z nich má rád Analýzu, Diskrétní matematiku nebo Programování. 130 studentů má rádo Programování, 100 Diskrétní matematiku, 40 Analýzu, 35 Programování i Diskrétní matematiku, 25 Programování i Analýzu, a 15 Analýzu i Diskrétní matematiku, Kolik studentů má rádo všechny tři předměty?
2. Dokažte vzorec $\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$ pro výpočet Eulerovy funkce pomocí principu inkluze a exkluze. (Dále rozhodněte, pro která n je $\varphi(n)$ liché.)
3. Jaká je pravděpodobnost, že při náhodném seřazení 7 trpaslíků, 5 skřítků a 4 orků do řady příslušníci žádného druhu nebudou všichni pohromadě? (Příslušníky jednoho druhu považujeme za nerozlišitelné.)
4. Určitou nemocí trpí jeden z tisíce obyvatel. K dispozici je test, který nemocnému potvrdí s pravděpodobností 99 procent, že je nemocný, a zdravému s pravděpodobností 95 procent, že je zdravý. Jaká je pravděpodobnost, že když máte pozitivní výsledek testu, tak jste opravdu nemocní?
5. Dokažte, že jsou-li jevy A, B nezávislé, pak jsou nezávislé i jejich doplňky \overline{A} a \overline{B} , a také A a \overline{B} .
6. Najděte jevy A, B, C (v nějakém konečném pravděpodobnostním prostoru) takové, že každé dva z nich jsou nezávislé, ale všechny tři nezávislé nejsou.
7. Hodíme pětkrát po sobě symetrickou mincí, která má dvě strany, líc a rub. Zjistěte, které podmnožiny z následujících jevů jsou nezávislé:
 - (a) A) padne sudý počet líců
B) padnou aspoň 3 líce
C) v prvním hoďu padne líc
 - (b) A) padne sudý počet líců
B) v prvních třech hodech padne stejná strana
C) v prvním hoďu padne líc