Diskrétní matematika — Cvičení 3

1. Dokažte matematickou indukcí, že pro každé přirozené číslo n platí

   (a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$,

   (b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$,

   (c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. Dokažte, že šachovnici $2^n \times 2^n$, ve které jedno políčko chybí, lze vydláždit dlaždicemi tvaru "L" pokrývajícími tři políčka (jsou povolena všechna 4 otočení).

Fibonacciova čísla jsou definována následovně: $F_1 = F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pro každé $n \geq 3$. Tedy $F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5$ atd.

3. Dokažte, že počet posloupností nul a jedniček délky n, které neobsahují dvě nuly těsně vedle sebe, je roven F_{n+2}.

4. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí

   (a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$ (můžete využít předchozí příklad),

   (b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$,

   (c) $\displaystyle F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$.

5. Najděte

   - relaci R na $\{1,2,3,4\}$, která je symetrická i antisymetrická, a
   - relaci S na $\{1,2,3,4\}$, která není symetrická ani antisymetrická.

6. Popište, jaká relace vznikne složením ostrých uspořádání

   a) $< \circ <$ na množině $\mathbb{N}$,

   b) $< \circ <$ na množině $\mathbb{R}$.

7. Najděte relace R, S na nějaké množině X takové, že $R \circ S \neq S \circ R$. Co když navíc požadujeme, aby R, S byly

   b) funkce?

   c) bijekce?

---

domácí příklady, výsledky a další informace: `http://kam.mff.cuni.cz/~kyncl/dm/cvic.html`