Příklady z Diskrétní matematiky - ZS 2015/2016

zadáno 8-9. 10. 2015, odevzdat do 15-16. 10. 2015

1. Na vodorovné tyči dlouhé 1 metr je 25 mravenců. V čase 0 se každý mravenec začne pohybovat rychlostí 1 cm/s podél tyče, a to v jednom ze dvou možných směrů (vlevo nebo vpravo). Na okrajích tyče jsou zábrany, takže pokud nějaký mravenec dojde na okraj, otočí se čelem vzad a pokračuje v pohybu opačným směrem. Pokud se dva mravenci potkají, nemohou se vyhnout; místo toho se oba otočí čelem vzad a pokračují v pohybu opačným směrem. Kde se bude nacházet za 100 sekund mravenec, který je v čase 0 sedmý zleva? **[3]**

2. Kolik nejvýše koní lze rozmístit na obdélníkovou šachovnici 3×2015, aby se žádní dva vzájemně neohrožovali? **[4]**

3. Kolik nejvýše střelců lze rozmístit na čtvercovou šachovnici $n \times n$, aby se žádní dva vzájemně neohrožovali? **[4]**

4. Rozhodněte, zda každý dostatečně veliký čtverec $n \times n$ lze vydláždit čtvercovými dlaždicemi o rozměrech

   a) 2×2 a 3×3, **[5]**

   b) 7×7, 8×8 a 9×9. **[5]**

5. Rozhodněte, pro která přirozená n lze šachovnice $n \times n$ vydláždit dlaždicemi tvaru "L"pokrývajícími tři políčka (jsou povolena všechna 4 otočení). **[3]**

zadáno 15.-16. 10. 2015, odevzdat do 22.-23. 10. 2015

6. V rovině je nakreslených n přímek, z nichž žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné tři neprocházejí stejným bodem. Dokažte, že rozdělí rovinu přesně na $\frac{n^2+n}{2}+1$ částí. **[2]**

7. Dokažte matematickou indukcí, že pro každé přirozené číslo n platí

   (a) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \frac{k^2}{(k-1)(k+1)} = \frac{2n}{n+1}$,

   (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 3^k = \frac{3^n-1}{2}$.

   [2]

8. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2.$$

   [2]

9. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí

$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\cdots+\frac{1}{(4n-3)\cdot(4n+1)} < \frac{1}{4}.$$

   [2]

10. Nechť x je reálné číslo takové, že $x+\frac{1}{x}$ je celé. Dokažte, že pak pro libovolné přirozené n je i číslo $x^n+\frac{1}{x^n}$ celé. **[3]**

11. Kolik existuje cest procházejících všechna políčka šachovnice $n\times 3$, každé právě jednou, začínajících na políčku $(1,1)$ a končících na políčku $(n,1)$? (Na cestách uvažujeme jen vodorovné a svislé kroky.) **[4]**

12. Nekonečná posloupnost $a_1, a_2, \ldots$ je zadána vztahy $a_1 = 2$ a $a_{n+1} = a_n^2 + a_n - 1$. Dokažte, že každé dva její členy jsou navzájem nesoudělné. **[3]**

13. Nechť M je množina 2015 různých celých čísel z uzavřeného intervalu $[-2012, 2012]$. Dokažte, že lze z M vybrat tři různé prvky a, b, c takové, že $a+b+c=0$. **[4]**

zadáno 22.-23. 10. 2015, odevzdat do 5.-6. 11. 2015

14. Nechť F_n je n-tý člen Fibonacciho posloupnosti (tj. $F_1 = F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pro $n \geq 3$). Bez použití explicitního vzorce pro F_n dokažte, že pro každé přirozené $n \geq 3$ čísla $F_{2n-1}, 2F_nF_{n-1}$ a $F_n^2 - F_{n-1}^2$ tvoří délky stran pravoúhlého trojúhelníka. **[3]**

15. Dokažte, že pro všechna přirozená čísla k, n platí, že F_n dělí F_{kn}. **[2]**

16. Uvažujme nekonečnou šachovnici, kde každé políčko má celočíselné souřadnice (x, y). Na každém políčku se souřadnicí $y \leq 0$ je jeden hrací kámen. Je-li ve dvou hranově sousedních políčcích P_1, P_2 aspoň jeden kámen, lze provést tah, a to následovně: vezmeme jeden kámen z políčka P_1, přeskočíme přes P_2 a položíme jej na následující políčko P_3; přitom však odstraníme jeden kámen z P_2. Je povoleno nashromáždit víc kamenů na jednom políčku. Kolik nejméně tahů je potřeba, abychom aspoň s jedním kamenem doskočili na políčko o souřadnicích $(0, 5)$? **[5]**

17. Nechť R a S jsou relace ekvivalence na množině X. Rozhodněte, zda také $R \cap S$, $R \cup S$, R^c, $R \circ S$ je nutně ekvivalence. (R^c značí doplněk R v kartézském součinu $X \times X$.) **[4]**

18. Nechť R a S jsou (neostrá) částečná uspořádání na množině X. Rozhodněte, zda také $R \cap S$, $R \cup S$, R^c, $R \circ S$ je nutně částečné uspořádání. **[4]**

19. Nechť S je relace soudělnosti na množině $\mathbb{N} \setminus \{1\}$, tedy
$$mSn \Leftrightarrow NSD(m, n) > 1.$$
Je S (neostré) částečné uspořádání? Je S ekvivalence? **[2]**

20. Ukažte matematickou indukcí, že každá acyklická relace na konečné množině má minimální prvek.
(Relace R na množině X se nazývá *acyklická*, pokud pro žádné $k \geq 1$ neexistují prvky $x_1, x_2, \ldots, x_k \in X$ takové, že x_1Rx_2, x_2Rx_3, $\ldots$, $x_{k-1}Rx_k$ a x_kRx_1. Prvex $x \in X$ je *minimální* pro R pokud neexistuje $y \in X \setminus \{x\}$ takové, že yRx.) **[2]**

21. Najděte řetězec a antiřetězec maximální velikosti v množině $\{1, 2, \ldots, n\}$ částečně uspořádané relací dělitelnosti a dokažte, že větší neexistují. **[4]**

zadáno 5.-6. 11. 2015, odevzdat do 12.-13. 11. 2015

22. **[termín odevzdání posunut na 19.-20. 11. 2015]**
    Kolik je v konvexním n-úhelníku křížení všech úhlopříček, pokud se žádné tři úhlopříčky nekříží ve stejném bodě? (Křížením rozumíme společný vnitřní bod dvou úhlopříček, ne tedy vrchol.) **[2]**

23. Kolika způsoby lze konvexní n-úhelník (s vrcholy očíslovanými $1, 2, \ldots, n$) rozřezat na trojúhelníky podél jeho úhlopříček tak, že řezy se vzájemně nekříží a každý z trojúhelníků má aspoň jednu stranu společnou s hranou n-úhelníka? **[3]**

24. Kolika způsoby lze projít čtvercovou mřížku obdélníkového tvaru z levého dolního rohu do pravého horního rohu, pokud má m čtverečků ve vodorovném směru, n čtverečků ve svislém směru a můžeme se pohybovat jen směrem vpravo a nahoru po hranách mřížky? **[2]**

zadáno 12.-13. 11. 2015, odevzdat do 26.-27. 11. 2015

25. Dokažte kombinatorickou interpretací (případně výpočtem), že

$$\sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$$

[2]

26. Sečtěte

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$$

pomocí kombinatorické interpretace (případně výpočtem). **[2]**

27. Sečtěte

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{4n}{2k} \quad \text{a} \quad \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \binom{4n}{2k+1}.$$

[3]

28. K jednání u kulatého stolu se sešlo 47 trollů a 47 trpaslíků. Kolika způsoby si mohou sednout, když rozesazení, která se liší jen pootočením, považujeme za stejná? (Trollové jsou všichni stejní, stejně tak trpaslíci. Může se hodit dokázat následující tvrzení: je-li kolem stolu n pozic, a rozesazení R se pootočením o k pozic ($1 \leq k < n$) nezmění, pak se R nezmění ani pootočením o d pozic, kde d je nějaký dělitel n menší než n.) **[4]**

zadáno 26.-27. 11. 2015, odevzdat do 3.-4. 12. 2015

29. Kolika způsoby lze obarvit políčka šachovnice $n \times n$ černě a bíle tak, že v každém čtverci 2×2 jsou dvě černá a dvě bílá políčka? **[3]**

30. Jaká je pravděpodobnost, že náhodná permutace n prvků má přesně tři pevné body? **[2]**

31. Jaká je pravděpodobnost, že při náhodném seřazení 9 trpaslíků, 8 orků a 3 skřítků do řady nebude žádný trpaslík a ork těsně vedle sebe? (Příslušníky jedné rasy považujeme za nerozlišitelné.) Stačí správný postup a vzorec, nemusíte vyčíslovat výsledek. **[3]**

32. V piksle máme 12 modrých a 9 červených pilulek. Postupně náhodně vybíráme jednu pilulku po druhé a už je nevracíme. Jaká je pravděpodobnost, že třetí vybraná pilulka bude červená? **[2]**

33. V piksle máme 6 modrých a 3 červené pilulky, a kromě toho máme na stole šest dalších pilulek od každé barvy. V každém kroku náhodně vybereme z piksly jednu pilulku, a pokud v piksle zbylo a modrých a b červených pilulek, vrátíme zpět jednu pilulku, která bude modrá s pravděpodoností $a/(a+b)$ a červená s pravděpodobností $b/(a+b)$. Jaká je pravděpodobnost, že sedmá pilulka vybraná z piksly bude červená? **[3]**

zadáno 3.-4. 12. 2015, odevzdat do 10.-11. 12. 2015

34. V Česku je mezi lidmi narozenými na jaře větší procento hokejistů než mezi lidmi narozenými na podzim. Na Slovensku je také mezi lidmi narozenými na jaře větší procento hokejistů než mezi lidmi narozenými na podzim. Lze z těchto informací logicky odvodit, že v celém Československu je mezi lidmi narozenými na jaře větší procento hokejistů než mezi lidmi narozenými na podzim? Zdůvodněte. **[2]**

35. Uvažujme hrací kostky tvaru krychle, které mají na každé stěně napsáno nějaké přirozené číslo; čísla se mohou opakovat. Řekneme, že kostka X *je lepší* než kostka Y, právě když platí, že při současném hodu oběma kostkami s pravděpodobností větší než $1/2$ padne na X větší číslo než na Y. Sestrojte hrací kostky X, Y, Z tak, aby X byla lepší než Y, Y lepší než Z a Z lepší než X. **[3]**

36. *Náhodný graf* na $[n]$ vznikne vybráním každé hrany ij, kde $1 \leq i < j \leq n$, nezávisle s pravděpodobností $1/2$. Jinými slovy, na množině všech grafů na $[n]$ uvažujeme rovnoměrné rozdělení. Jaká je střední hodnota počtu kružnic délky 4 v náhodném grafu na $[n]$? **[3]**

37. Jaká je střední hodnota počtu hodů kostkou, než poprvé padnou všechna sudá čísla? **[3]**

zadáno 10.-11. 12. 2015, odevzdat do 7.-8. 1. 2016

38. Házíme pravidelným čtyřstěnem, na jehož stěnách jsou napsána čísla $1, 2, 3, 4$. Skončíme, pokud součet dvou následujících hodů je prvočíslo. Jaká je pravděpodobnost, že poslední hozené číslo je 1? (Varování: není to 1/4 ani 1/3.) **[5]**

39. Opice píše na psacím stroji, který má 26 písmen abecedy. Písmena volí náhodně, nezávisle, každé se stejnou pravděpodobností. Jak dlouhý text průměrně napíše, než se v něm poprvé objeví posloupnost "RUR" tvořená třemi těsně po sobě následujícími písmeny? **[4]**

40. Jsou každé dva $(n-2)$-regulární grafy na n vrcholech izomorfní? **[2]**

41. Dokažte, že každý (konečný) graf je izomorfní nějakému indukovanému podgrafu nekonečného grafu $X = (\mathbb{N}, E)$, kde $\{m, n\} \in E \Leftrightarrow NSD(m, n) > 1$ (tedy vrcholy X jsou přirozená čísla a hrany spojují soudělná čísla.) **[3]**

42. a) Spočítejte počet kružnic délky k v grafu K_n. **[1]**
    b) Spočítejte počet kružnic délky k v grafu $K_{m,n}$. **[2]**
    (Kružnicí v grafu myslíme podgraf izomorfní C_k).

43. Kolik maximálně hran může mít graf s n vrcholy a k komponentami? **[3]**

44. a) Najděte strom, který má přesně 144 automorfismů. **[2]**
    b) Dokažte, že neexistuje strom, který má přesně 3 automorfismy. **[4]**

45. Dokažte, že hrany každého 4-regulárního grafu je možné zorientovat tak, aby vstupní stupeň každého vrcholu byl sudý. **[1]**

46. Dokažte, že hrany každého souvislého grafu se sudým počtem hran je možné zorientovat tak, aby vstupní stupeň každého vrcholu byl sudý. **[4]**

47. Najděte všechny grafy, které nemají cestu délky 4 jako podgraf (a dokažte, že jiné neexistují). **[4]**

48. V závislosti na n spočítejte počet komponent grafu, jehož vrcholy jsou políčka šachovnice
    a) $2 \times n$
    b) $3 \times n$
    a hrany spojují políčka, mezi kterými lze táhnout koněm. **[3]**

zadáno 7.-8. 1. 2016, odevzdat do 14.-15. 1. 2016

49. Strom na 2492 vrcholech má pouze vrcholy stupně 1 a 7. Kolik minimálně a maximálně může mít listů? **[2]**

50. Mějme strom T s $n \geq 2$ vrcholy. Pro $i = 1, 2, \ldots, n$ označme počet vrcholů T stupně i jako p_i. Dokažte, že platí

$$p_1 - p_3 - 2p_4 - 3p_5 - \cdots - (n-2)p_n = 2.$$

[2]

51. Pan profesor předvádí důkaz věty, která je ekvivalencí výroků $V_1, V_2, \ldots, V_n$. Každý krok důkazu věty je důkaz nějaké implikace $V_i \Rightarrow V_j$. Řekneme, že důkaz je *zbytečně dlouhý*, pokud nějaký jeho krok lze vynechat. Jaká je maximální délka důkazu, který není zbytečně dlouhý? **[3]**

52. Každý z 32 přátel se dozvěděl jednu úžasnou novinku, kterou chce urgentně sdělit všem ostatním. Každý má po ruce telefon. Vždy, když si dvojice zavolá, sdělí si všechny novinky, co už znají. V jakém pořadí si mají volat, aby se všichni dozvěděli všech 32 novinek nejpozději během 60 telefonních hovorů? **[3]**

zadáno 14.-15. 1. 2016, odevzdat do 12. 2. 2016 nebo nejpozději týden před zkouškou (pro jistotu)

53. Dokažte, že každý souvislý graf má uzavřený sled, který obsahuje každou hranu přesně dvakrát. **[2]**

54. Pro co největší celočíselnou konstantu c dokažte: Každý souvislý graf s n vrcholy a $n + c$ hranami je rovinný. **[2c]**

55. a) Dokažte, že každý rovinný graf, jehož vrcholy mají všechny stupeň aspoň 5, má aspoň 12 vrcholů. **[2]**
b) Existuje rovinný graf se 112 vrcholy, jehož všechny vrcholy mají stupeň aspoň 5, a aspoň 100 vrcholů má stupeň větší než 5? **[2]**

56. Rozhodněte, zda následující graf (říká se mu graf incidence Fanovy roviny) je rovinný: bipartitní graf s vrcholy $1, 2, \ldots, 7, a, b, \ldots, g$, kde vrcholy $a, b, \ldots, g$ (reprezentující přímky) postupně sousedí s následujícími trojicemi ostatních vrcholů (které reprezentují body): $\{1, 2, 3\}$, $\{3, 4, 5\}$, $\{5, 6, 1\}$, $\{1, 4, 7\}$, $\{2, 5, 7\}$, $\{3, 6, 7\}$, $\{2, 4, 6\}$. **[3]**

57. Nakreslete na torus (povrch pneumatiky) následující grafy bez křížení hran:
a) K_7, **[2]**
b) $K_{3,6}$. **[2]**
Torus můžete reprezentovat např. jako obdélník, kde se k sobě slepí protější strany (hrany grafu pak mohou vést i "přes okraj").

58. Dokažte, že $K_{4,5}$ ani $K_{3,7}$ nelze nakreslit na torus bez křížení. Můžete k tomu použít variantu Eulerovy formule pro torus: $|E| \leq |V| + |F|$, kde F je množina stěn nakreslení. (Rovnost by platila pro taková nakreslení souvislých grafů, kde každá stěna jde deformovat na disk). **[3]**

59. Pro každé $n \geq 3$ najděte graf na n vrcholech, který je
a) rovinný a má maximální možný počet hran, **[2]**
b) bipartitní, rovinný a má maximální možný počet hran. **[2]**

60. Dokažte, že pro žádné $n \geq 1$ nelze z n nekonvexních čtyřúhelníků poskládat konvexní mnohoúhelník. (Čtyřúhelníky se při skládání nesmí překrývat.) **[4]**