

Diskrétní matematika — Cvičení 5

1. Rozhodněte, zda následující relace R, S na \mathbb{N}^2 jsou částečná uspořádání. Pokud ano, rozhodněte dále, zda jsou lineární, načrtněte jejich Hasseův diagram, a určete jejich nejmenší, největší, minimální a maximální prvky.

a) $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a < c \vee (a = c \wedge b \leq d)$,

b) $(a, b)S(c, d) \Leftrightarrow a \leq c \wedge b \geq d$.

2. Určete počet

a) všech,

b) reflexivních,

c) symetrických,

d) antisymetrických

relací na množině $\{1, 2, 3, 4\}$.

3. Kolik je na množině $\{1, 2, 3, 4\}$ ekvivalencí?

4. Kolika způsoby lze napsat n jako součet k

a) celých nezáporných čísel,

b) přirozených čísel,

záleží-li na pořadí sčítanců?

5. Určete počet uspořádaných dvojic (A, B) , kde $A, B \subseteq [n]$, splňujících navíc

a) $A \cap B = \emptyset$,

b) $A \subseteq B$,

c) $|A \cap B| = 1$.

6. Dokažte následující identity kombinatorickou interpretací (případně i výpočtem):

a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

b) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

c) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$

d) $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

e) $\binom{n}{m} \binom{m}{r} = \binom{n}{r} \binom{n-r}{m-r}$

f) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{m}{r-k} = \binom{m+n}{r}$

g) $\sum_{k=r}^n \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1}$