Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

6. série — bonusová

odevzdat do 8. 2. 2024

Řešení úloh 1,2,3,6 prosím, odevzdávejte odděleně od úloh 4,5; každá podmnožina bude mít jiného opravovatele.

1. Nechť $\mathcal{C}$ je množina všech buněk (stěn dimenze 2) arrangementu n přímek v rovině. Označme počet vrcholů buňky C jako $f_0(C)$. Dokažte, že $\sum_{C\in\mathcal{C}} f_0(C)^2 = O(n^2)$. **[2]**

2. Nechť S je množina n geometrických útvarů v rovině. *Průnikový graf* S je graf na n vrcholech, které odpovídají útvarům z S. Dva vrcholy jsou spojené hranou právě tehdy, když jim odpovídající útvary mají neprázdný průnik.

   (a) Všech grafů na n vrcholech je $2^{\binom{n}{2}} = 2^{n^2/2+O(n)}$. Dokažte, že průnikových grafů n úseček v rovině je jenom $2^{O(n\log n)}$. (Pozor na kolineární úsečky!) Použijte větu o počtu znaménkových kombinací. **[3]**

   (b) Dokažte, že průnikových grafů n křivek v rovině je alespoň $2^{\Omega(n^2)}$. Pokud chcete, můžete místo pro n křivek řešit úlohu pro n konvexních množin. **[2]**

3. Nechť $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ je množina n bodů v rovině. Řekneme, že body x a y mají *stejný výhled* na P, jestliže jsou z nich body P vidět ve stejném cyklickém pořadí (tj. jestliže otáčíme polopřímkou s počátkem v bodu x resp. y po směru hodinových ručiček, tato přímka nachází body P ve stejném pořadí). Předpokládejme, že ani jeden z bodů x a y nepatří do P a neprochází jimi žádná přímka určená dvěma body z P.

   Ukažte, že existuje množina P s $\Omega(n^4)$ různými „výhledy“. **[3]**

4. (a) Ukažte, že pro každé kladné iracionální číslo α existuje nekonečně mnoho dvojic čísel $m, n \in \mathbb{N}$ takových, že

   $$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{n^2}.$$

   Můžete využít větu 2.1.3 ze skript. **[1]**

   (b) Dokažte, že pro $\alpha = \sqrt{2}$ existuje jen konečně mnoho dvojic $m, n \in \mathbb{N}$ splňujících

   $$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{4n^2}.$$ **[2]**

   (c) Nechť α_1, α_2 jsou reálná čísla. Dokažte, že pro každé $N \in \mathbb{N}$ existují $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \le N$, taková, že pro každé $i \in \{1,2\}$ platí

   $$\left|\alpha_i - \frac{m_i}{n}\right| < \frac{1}{n\sqrt{N}}.$$ **[2]**

5. Množina bodů P *prošpendluje trojúhelníky* množinu bodů M, pokud každý trojúhelník určený trojicí bodů z M obsahuje ve svém vnitřku alespoň jeden bod z P.

   (a) Dokažte, že pro každé $n \ge 3$ a pro každou n-bodovou $M \subset \mathbb{R}^2$ v obecné poloze lze najít P s $2n-5$ body prošpendlující trojúhelníky M. **[2]**

   (b) Pro každé $n \ge 3$ najděte n-bodovou $M \subset \mathbb{R}^2$ v obecné poloze takovou, že žádná P s $2n-6$ body neprošpendluje její trojúhelníky. **[2]**

6. Kolik je buněk v arrangementu nadrovin v $\mathbb{R}^d$, které odpovídají $3\binom{d}{2}$ rovnicím $x_i - x_j = -1, 0, 1$, kde $1 \le i < j \le d$? **[3]**

Informace o cvičení naleznete na `https://kam.mff.cuni.cz/~kvgweb/kvg`