Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

5. série — Mnohostěny, arrangementy a Voroného diagramy

odevzdat do 12:20 10. 1. 2024

Řešení úloh 1,2,5, prosím, odevzdávejte odděleně od úloh 3,4,6; každá podmnožina bude mít jiného opravovatele.

1. Spočítejte přesný počet stěn dimenzí 1, 2 a 3 pro cyklický mnohostěn dimenze 4 s n vrcholy. **[2]**

2. Spočtěte počet stěn dimenzí 1 a 2 arrangementu n rovin v obecné poloze v $\mathbb{R}^3$. **[2]**

3. Nechť $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ je množina n bodů v rovině. Řekneme, že body x a y mají *stejný výhled* na P, jestliže jsou z nich body P vidět ve stejném cyklickém pořadí (tj. jestliže otáčíme polopřímkou s počátkem v bodu x resp. y po směru hodinových ručiček, tato přímka nachází body P ve stejném pořadí). Předpokládejme, že ani jeden z bodů x a y nepatří do P a neprochází jimi žádná přímka určená dvěma body z P.

   Ukažte, že maximální počet různých „výhledů" je $O(n^4)$. **[2]**

4. (a) Kolik je buněk v arrangementu $\binom{d}{2}$ nadrovin v $\mathbb{R}^d$, které odpovídají rovnicím $x_i = x_j$, kde $1 \leq i < j \leq d$? **[2]**

   (b) Kolik je buněk v arrangementu nadrovin v $\mathbb{R}^d$, které odpovídají rovnicím $x_i + x_j = 0$ a $x_i = x_j$, kde $1 \leq i < j \leq d$? **[2]**

5. Ukažte, že pro $n \geq 2$ má Voroného diagram $2n$-bodové množiny $A_{2n} = \{(i, 0, 0); i = 1, 2, \ldots, n\} \cup \{(0, n, j); j = 1, 2, \ldots, n\}$ v $\mathbb{R}^3$ alespoň cn^2 vrcholů, kde c je nějaká kladná konstanta. **[2]**

6. Nechť P je konečná množina bodů v rovině, z nichž žádné 3 neleží na společné přímce a žádné 4 na společné kružnici. Definujme na P graf DT (zvaný *Delaunayova triangulace*): dva body a, b jsou spojeny hranou, právě když existuje kruh mající a i b na hranici a žádný bod z P uvnitř.

   Dokažte, že DT je rovinné nakreslení souvislého grafu, jehož každá vnitřní stěna je trojúhelník. **[3]**

Informace o cvičení naleznete na `https://kam.mff.cuni.cz/~kvgweb/kvg`