

# Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

## 1. série — Konvexní množiny

nápověda 25.10.2023, odevzdat do 12:20 1.11.2023

**Z důvodu ochrany osobních údajů nám u prvních odevzdaných řešení napište kromě jména i přezdívku, pod kterou chcete mít své body zveřejněny na webu. U dalších řešení už stačí psát buď jméno, nebo přezdívku.**

1. Najděte příklad množiny  $M \subset \mathbb{R}^2$ , která je sjednocením dvou konvexních množin a jejíž doplněk se skládá z 5 navzájem oddělených oblastí (přesněji komponent souvislosti). **[2]**
2. Dokažte Carathéodoryho větu (můžete použít Radonovu větu nebo část postupu jejího důkazu). **[2]**
3. Uvažujme množinu  $2d + 2$  bodů  $M = \{x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_{d+1}, y_{d+1}\}$  v  $\mathbb{R}^d$ . Dokažte, že  $M$  se dá rozdělit na dvě podmnožiny  $A$  a  $B$ , z nichž každá obsahuje pro každé  $i = 1, 2, \dots, d + 1$  právě jeden bod z  $\{x_i, y_i\}$ , tak, aby se konvexní obaly  $A$  a  $B$  protínaly. (Můžete využít toho, že  $(d+1)$ -tice vektorů  $x_i - y_i$  je lineárně závislá a poté postupovat podobně jako v důkaze Radonovy věty.) **[2]**
4. Nechť  $M$  je konečná množina alespoň čtyř bodů v rovině, z nichž některé jsou červené a zbylé jsou modré. Navíc platí, že pro libovolnou čtveřici  $V$  bodů z  $M$  existuje přímka, která ostře odděluje červené body z  $V$  od modrých bodů z  $V$ . Dokažte, že pak existuje přímka ostře oddělující všechny červené body z  $M$  od všech modrých bodů z  $M$ . **[3]**
5. Nechť  $X_1, X_2, \dots, X_{d+1}$  jsou konečné množiny bodů z  $\mathbb{R}^d$  takové, že pro každé  $i \in \{1, 2, \dots, d + 1\}$  počátek leží v  $\text{conv}(X_i)$ . Dokažte, že potom existují body  $x_i \in X_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, d + 1\}$ , takové, že počátek leží v  $\text{conv}(\{x_1, x_2, \dots, x_{d+1}\})$ . **[4, nápověda]**

---

Informace o cvičení naleznete na <https://kam.mff.cuni.cz/~kvgweb/kvg>