Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie 2

5. série — bonusová

odevzdat do 16. 7. 2023

V této sérii používáme pojmy a definice z knihy G. Ziegler, Lectures on polytopes, Graduate Texts in Mathematics 152, Springer-Verlag, New York, 1995. ISBN: 0-387-94365-X

Definice ryzího komplexu. Polygonální komplex $\mathcal{C}$ je *ryzí*, pokud každá jeho stěna je obsažena v některé stěně dimenze $\dim(\mathcal{C})$.

Definice bezzásekové shellovatelnosti. Polytopální komplex $\mathcal{C}$ je *bezzásekově shellovatelný* pokud každý jeho částečný shelling má pokračování. Jinak řečeno, pro každý shellovatelný podkomplex $\mathcal{C}'$ komplexu $\mathcal{C}$ stejné dimenze existuje shelling $\mathcal{C}$ shellující $\mathcal{C}'$ jako první.

1. Najděte příklad ryzího polytopálního 2-komplexu K, který není shellovatelný, ale pro který existuje permutace $F_1, \ldots, F_s$ jeho faset taková, že pro každé i, $1 < i \leq s$, průnik F_i se sjednocením předcházejících faset je neprázdný a ryzí 1-dimenzionální. (Jinými slovy najděte komplex K, pro který platí podmínka 8.1(ii'), ale neplatí 8.1(ii).) **[1]**

2. Dokažte, že každé polytopální podrozdělení konvexního mnohoúhelníka (uvažované jako 2-komplex) je bezzásekově shellovatelné.
   Poznámka: na polytopální podrozdělení se můžeme dívat jako na úsečkové nakreslení 2-souvislého rovinného grafu, kde všechny vnitřní stěny jsou konvexní. **[2]**

3. Nechť $H_d = [-1, 1]^d$ je hyperkrychle dimenze $d \geq 1$. Řekneme, že množina M faset hyperkrychle je *antipodální*, pokud pro každou fasetu $F \in M$ je v M i protější faseta $-F$.

   (a) Dokažte, že každá permutace faset H_d začínající a končící protějšími fasetami je shelling hranice H_d. Dokažte, že každá množina faset H_d, která není antipodální, indukuje shellovatelný podkomplex. **[2]**

   (b) Dokažte, že antipodální množina faset H_d, která je neprázdná a neobsahuje všechny fasety H_d, indukuje podkomplex, který není shellovatelný. **[1]**

   Jako bonus z toho odvoďte, že ∂H_n je bezzásekově shellovatelný.

4. Nechť K je ryzí simpliciální komplex a $F_1, F_2, \ldots, F_s$ permutace jeho faset. Dokažte:

   (a) Pokud pro každé i platí, že F_i obsahuje právě jednu minimální stěnu, která není obsažena v žádné F_j pro $j < i$, pak $F_1, F_2, \ldots, F_s$ je shelling K. **[2]**

   (b) Nechť $R_1, R_2, \ldots, R_s$ jsou stěny K takové, že intervaly $[R_i, F_i]$ tvoří rozklad svazu stěn K. Dále předpokládejme, že pro každé i, j platí

   $$R_i \subseteq F_j \Rightarrow i \leq j.$$

   Pak $F_1, F_2, \ldots, F_s$ je shelling K. **[2]**

5. Dokažte, že pro každé dostatečně velké n platí, že hranice každého konvexního mnohoúhelníka na n vrcholech má shelling, který ale není přímkový shelling pro žádnou přímku l. **[3]**

6. Nechť P je k-sousedský mnohostěn dimenze $d \geq 1$. Ukažte, že každá jeho stěna dimenze $2k-1$ je simplex. Z toho odvoďte, že pokud P je $(\lfloor d/2 \rfloor + 1)$-sousedský, pak P už je nutně simplex.
   (Poznámka: Může se sice hodit Upper Bound Theorem, ale jde se bez něj obejít a využít jen Radonova věta.) **[2]**