Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie 2

4. série — Průnikové vlastnosti konvexních množin

odevzdat do 12. 5. 2023

1. (Carathéodoryho věta pro kužely.)
   Nechť A je libovolná množina v $\mathbb{R}^d$ a $x \in \mathrm{cone}(A)$, tedy x lze vyjádřit jako $x = \sum_{i \in [n]} \alpha_i a_i$ pro $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in A$ a $\alpha_i \geq 0$. Dokažte, že existuje množina $B \subseteq A$ s nejvýše d body taková, že $x \in \mathrm{cone}(B)$. **[2]**

2. (Barevná Carathéodoryho věta pro kužely.)
   Nechť x je bod v $\mathbb{R}^d$ různý od počátku a $A_1, \ldots, A_d$ jsou množiny v $\mathbb{R}^d$ takové, že pro každé $i \in [d]$ platí $x \in \mathrm{cone}(A_i)$. Dokažte, že existují body $a_1, \ldots, a_d$ takové, že $a_i \in A_i$ a zároveň $x \in \mathrm{cone}(\{a_1, \ldots, a_d\})$. **[2]**

3. (Barevná Carathéodoryho věta, silnější verze v rovině.)
   Nechť X_1, X_2, X_3 jsou konečné množiny bodů v rovině takové, že pro každé $i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j$, platí $0 \in \mathrm{conv}(X_i \cup X_j)$. Dokažte, že existují body x_1, x_2, x_3 takové, že $x_i \in X_i$ a zároveň $0 \in \mathrm{conv}(\{x_1, x_2, x_3\})$. **[3]**

4. (Barevná Hellyho věta.)
   Nechť $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_{d+1}$ jsou konečné systémy konvexních množin v $\mathbb{R}^d$ takové, že pro každou volbu $C_i \in \mathcal{C}_i$, $i \in [d+1]$ platí $\bigcap_{i \in [d+1]} C_i \neq \emptyset$. Dokažte, že existuje $i \in [d+1]$ takové, že $\bigcap \mathcal{C}_i \neq \emptyset$ (tj. existuje bod ležící ve všech množinách jedné barvy). Nápověda: uvažte lexikografická minima průniků a ukažte, že jedno z nich je hledaným bodem. **[3]**

5. Dokažte, že hodnota $(r-1)(d+1)+1$ v Tverbergově větě nejde vylepšit: pro každá přirozená čísla $d, r \geq 2$ existuje množina $(r-1)(d+1)$ bodů v $\mathbb{R}^d$ bez Tverbergova r-rozkladu (tj. pro každý rozklad na r částí $X_1, \ldots, X_r$ platí $\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{conv}(X_i) = \emptyset$). **[2]**

6. (a) Nechť S je množina n bodů v obecné poloze v rovině a $x \in \mathrm{conv}(S)$. Dokažte, že existuje alespoň $n-2$ trojúhelníků tvořených body z S, které obsahují x ve svém konvexním obalu. **[2]**

   (b) Nechť S je n-bodová množina v obecné poloze v rovině a $x \in \mathbb{R}^2$ libovolný bod. Dokažte, že počet trojúhelníků tvořených body z S, které obsahují x ve svém konvexním obalu, je maximálně $n^3/24 + O(n^2)$. Nápověda: počítejte trojúhelníky neobsahující x. **[3]**