

Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie 2

2. série — k -díry, půlící přímky a nakreslení grafů

odevzdat do 31. 3. 2023

1. Necht' X je konečná neprázdná množina bodů v obecné poloze v rovině. Dokažte, že počty k -děr v X splňují následující identity:

$$(a) \sum_{k=1}^{|X|} (-1)^k \cdot \#k\text{-děr} = -1, \quad [2]$$

- (b) Pokud $|X| \geq 2$, pak

$$\sum_{k=1}^{|X|} (-1)^k \cdot k \cdot \#k\text{-děr} = -\#\text{bodů uvnitř } \text{conv}(X). \quad [2]$$

Nápověda: posouvání bodů po křivkách do vhodné konfigurace.

2. Necht' X je n -bodová množina v obecné poloze v rovině. Dokažte, že počet 4-děr v X je minimálně kvadratický v n . [2]
3. Necht' P je konečná množina bodů v rovině ne nutně v obecné poloze, která neobsahuje 5-díru. Dokažte, že pak každý konvexní 5-úhelník Q určený body z P obsahuje alespoň jeden bod z P v uzavřeném „vnitřním“ pětiúhelníku určeném úhlopříčkami Q . [2]
4. Necht' n je sudé a P je množina n bodů v obecné poloze v rovině. Necht' $k \leq n/2$ a h je přímka, která neprochází žádným bodem P a rozděluje rovinu na dvě poloroviny obsahující k a $n - k$ bodů z P . Ukažte, že h protíná přesně k půlících úseček P . [2]
5. Necht' P je množina n bodů v obecné poloze v rovině. Řekneme, že dvojice bodů z P je k -hrana, pokud přímka určená těmito dvěma body odděluje z množiny P přesně k bodů v jedné otevřené polorovině. Označme $E_k(P)$ počet k -hran v P . Dále označme $\overline{cr}(P)$ počet čtveřic bodů z P v konvexní poloze.

Dokažte následující identitu:

$$\overline{cr}(P) = 3 \binom{n}{4} - \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} E_k(P) \cdot k \cdot (n - k - 2).$$

Nápověda: spočítejte dvěma způsoby počet trojic (a, \overline{bc}, d) , kde a, b, c, d jsou různé body z P , a leží vlevo od přímky \overline{bc} a d leží vpravo od \overline{bc} . [2]

6. Hrany grafu jsou *nezávislé* pokud nemají společný vrchol. O *nakreslení* grafu předpokládáme, že hrany mají jen konečný počet společných bodů a každý společný bod hran kromě společného vrcholu je křížení.

Rozhodněte, pro které volby n a m platí, že $K_{m,n}$ má v každém nakreslení v rovině celkem lichý počet křížení nezávislých dvojic hran.

Nápověda: co se změní při spojitým deformování hran? [3]