

Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

4. série — Dualita a mnohostěny

náповěda 14. 12. 2022, odevzdat do 9:00 21. 12. 2022

- (Doplnění důkazu, že každý V -mnohostěn v \mathbb{R}^d je také H -mnohostěnem.)
 - Nechť $C \subseteq \mathbb{R}^d$ je konvexní množina. Dokažte, že C^* je omezená právě tehdy, když 0 leží ve vnitřku C . [2]
 - Ukažte, že pro libovolnou množinu $X \subset \mathbb{R}^d$ je $(X^*)^*$ rovno uzávěru $\text{conv}(X \cup \{0\})$. [2]
 - Nechť $P \subset \mathbb{R}^d$ je V -mnohostěn obsahující 0 ve svém vnitřku. Ukažte, že P^* je průnik polopřímek duálních k vrcholům P . [1]
- Definujme *konvexní těleso* jako omezenou uzavřenou konvexní množinu v \mathbb{R}^d , jejíž vnitřek obsahuje 0 . Řekneme, že konvexní těleso je *hladké*, pokud v každém bodě hranice má právě jednu tečnou nadrovinu. Řekneme, že konvexní těleso je *ostře konvexní*, pokud jeho hranice neobsahuje úsečku kladné délky. Dokažte, že konvexní těleso K je ostře konvexní právě tehdy, když K^* je hladké. [1]
- Nechť v_1, \dots, v_n jsou lineárně nezávislé vektory v \mathbb{R}^n . Uvažujme konvexní obal C polopřímek p_1, \dots, p_n začínajících v počátku a určených těmito vektory (tedy $p_i = \{x \in \mathbb{R}^n; x = \lambda v_i, \lambda \geq 0\}$).
Dokažte, že v C existuje polopřímka, která s každou polopřímkou p_i svírá ostrý úhel. [3]
- Uvažme n úseček v rovině takových, že jejich prodloužení prochází počátkem, ale žádná z těchto úseček počátek neobsahuje. Ukažte, že když každé 3 z nich lze protnout přímkou, pak všech n úseček lze protnout jednou přímkou. (Protnout znamená mít společný alespoň jeden bod, tj. přímka obsahující úsečku ji i protíná.) [3]
- Dokažte, že každý konvexní mnohostěn $P \subset \mathbb{R}^d$ je kolmou projekcí nějakého k -rozměrného pravidelného simplexu v \mathbb{R}^n , pro vhodná k, n . (*Kolmou projekcí* rozumíme zobrazení π z prostoru \mathbb{R}^n na podprostor $M \cong \mathbb{R}^d$ vnořený v \mathbb{R}^n takové, že pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ je vektor $\pi(x) - x$ kolmý na M . Simplex je *pravidelný*, pokud všechny jeho hrany mají stejnou délku.) [4+náповěda]

Informace o cvičení naleznete na <https://kam.mff.cuni.cz/~kvgweb/kvg>