

## Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

### 3. série - Průsečíková čísla a počítání incidencí

odevzdat do 9:00 7.12.2022

1. Nechť  $c$  je kladné reálné číslo a  $G$  graf s  $n$  vrcholy a  $cn^2$  hranami. Ukažte, že v každém úsečkovém nakreslení  $G$  v rovině existuje párování  $M$  velikosti  $\Omega(n)$  a hrana protínající všechny hrany z  $M$ . (Hrany z  $M$  se protínat mohou, ale žádné dvě nemohou sdílet vrchol, protože  $M$  je párování.)  
Můžete použít průsečíkové lemma. *Úsečkové nakreslení* je nakreslení, kde každá hrana je nakreslena jako úsečka. [2]
2. Nechť  $I_{\text{circ}}(n, m)$  označuje maximální počet incidencí mezi  $n$  body a  $m$  jednotkovými kružnicemi v rovině. Ukažte, že  $I_{\text{circ}}(n, n) = O(n^{4/3})$ . [3]
3. Mějme systém podmnožin  $\mathcal{M} = \{M_1, M_2, \dots, M_n\}$   $n$ -prvkové množiny  $N$  (tj.  $\forall i \in [n] M_i \subseteq N$ ), z nichž každé dvě mají nejvýše jeden společný prvek. Počtem incidencí mezi  $N$  a  $\mathcal{M}$  budeme rozumět  $I(N, \mathcal{M}) := \sum_{i=1}^n |M_i|$ . Rozhodněte, zda musí platit  $I(N, \mathcal{M}) = O(n^{4/3})$ . [2]
4. Najděte  $n$ -bodovou množinu v  $\mathbb{R}^4$  s  $\Omega(n^2)$  jednotkovými vzdálenostmi. [3]
5. Nechť  $P$  je  $n$ -bodová množina v rovině.
  - (a) Nechť  $k > 1$ . Ukažte, že maximální možný počet přímek takových, že každá z nich obsahuje alespoň  $k$  bodů  $P$ , je  $O(n^2/k^3 + n/k)$  a že maximální počet incidencí těchto přímek s množinou  $P$  je  $O(n^2/k^2 + n)$ . [3]
  - (b) Je dáno  $\alpha \in (0, \pi)$ . Ukažte, že  $P$  určuje nejvýše  $O(n^{7/3})$  trojúhelníků s alespoň jedním úhlem o velikosti  $\alpha$ . (Nápověda: rozdělte trojúhelníky  $ABC$  s úhlem  $\alpha$  při vrcholu  $A$  na 2 skupiny podle toho, zda přímka  $AC$  obsahuje více než  $n^{1/3}$  bodů z  $P$ .) [3]