

Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie  
5. série — Mnohostěny, arrangementy a Voroného diagramy

odevzdat do 5. 1. 2022

**Řešení úloh 1,2,5, prosím, odevzdávejte odděleně od úloh 3,4,6; každá podmnožina bude mít jiného opravovatele.**

1. Spočítejte přesný počet stěn dimenzí 1, 2 a 3 pro cyklický mnohostěn dimenze 4 s  $n$  vrcholy. [2]

2. Spočítejte počet stěn dimenzí 1 a 2 arrangementu  $n$  rovin v obecné poloze v  $\mathbb{R}^3$ . [2]

3. Nechť  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  je množina  $n$  bodů v rovině. Řekneme, že body  $x$  a  $y$  mají *stejný výhled* na  $P$ , jestliže jsou z nich body  $P$  vidět ve stejném cyklickém pořadí (tj. jestliže otáčíme polopřímku s počátkem v bodu  $x$  resp.  $y$  po směru hodinových ručiček, tato přímka nachází body  $P$  ve stejném pořadí). Předpokládejme, že ani jeden z bodů  $x$  a  $y$  nepatří do  $P$  a neprochází jimi žádná přímka určená dvěma body z  $P$ .

Ukažte, že maximální počet různých „výhledů“ je  $O(n^4)$ . [2]

4. (a) Kolik je buněk v arrangementu  $\binom{d}{2}$  nadrovin v  $\mathbb{R}^d$ , které odpovídají rovnicím  $x_i = x_j$ , kde  $1 \leq i < j \leq d$ ? [2]

(b) Kolik je buněk v arrangementu nadrovin v  $\mathbb{R}^d$ , které odpovídají rovnicím  $x_i + x_j = 0$  a  $x_i = x_j$ , kde  $1 \leq i < j \leq d$ ? [2]

5. Ukažte, že pro  $n \geq 2$  má Voroného diagram  $2n$ -bodové množiny  $A_{2n} = \{(i, 0, 0); i = 1, 2, \dots, n\} \cup \{(0, n, j); j = 1, 2, \dots, n\}$  v  $\mathbb{R}^3$  alespoň  $cn^2$  vrcholů, kde  $c$  je nějaká kladná konstanta. [2]

6. Nechť  $P$  je konečná množina bodů v rovině, z nichž žádné 3 neleží na společné přímce a žádné 4 na společné kružnici. Definujme na  $P$  graf  $DT$  (zvaný *Delaunayova triangulace*): dva body  $a, b$  jsou spojeny hranou, právě když existuje kruh mající  $a$  i  $b$  na hranici a žádný bod z  $P$  uvnitř.

Dokažte, že  $DT$  je rovinné nakreslení souvislého grafu, jehož každá vnitřní stěna je trojúhelník. [3]