

Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

3. série - Průsečíková čísla a počítání incidencí

odevzdat do 24.11.2021

1. Dokažte, že graf s n vrcholy, který má úsečkové nakreslení v rovině bez třech vzájemně se křížících hran, má $O(n^{3/2})$ hran. Můžete použít průsečíkové lemma. (*Úsečkové nakreslení* je nakreslení, kde každá hrana je nakreslena jako úsečka.) [2]
2. Nechť $I_{\text{circ}}(n, m)$ označuje maximální počet incidencí mezi n body a m jednotkovými kružnicemi v rovině. Ukažte, že $I_{\text{circ}}(n, n) = O(n^{4/3})$. [3]
3. Mějme systém podmnožin $\mathcal{M} = \{M_1, M_2, \dots, M_n\}$ n -prvkové množiny N (tj. $\forall i \in [n] M_i \subseteq N$), z nichž každé dvě mají nejvýše jeden společný prvek. Počtem incidencí mezi N a \mathcal{M} budeme rozumět $I(N, \mathcal{M}) := \sum_{i=1}^n |M_i|$. Rozhodněte, zda musí platit $I(N, \mathcal{M}) = O(n^{4/3})$. [2]
4. Najděte n -bodovou množinu v \mathbb{R}^4 s $\Omega(n^2)$ jednotkovými vzdálenostmi. [3]
5. Nechť P je n -bodová množina v rovině.
 - (a) Nechť $k > 1$. Ukažte, že maximální možný počet přímek takových, že každá z nich obsahuje alespoň k bodů P , je $O(n^2/k^3 + n/k)$ a že maximální počet incidencí těchto přímek s množinou P je $O(n^2/k^2 + n)$. [3]
 - (b) Je dáno $\alpha \in (0, \pi)$. Ukažte, že P určuje nejvýše $O(n^{7/3})$ trojúhelníků s alespoň jedním úhlem o velikosti α . (Nápověda: rozdělte trojúhelníky ABC s úhlem α při vrcholu A na 2 skupiny podle toho, zda přímka AC obsahuje více než $n^{1/3}$ bodů z P .) [3]